Differentialgeometrie 1
Sommersemester 2019

Gabriele Benedetti

22. Juli 2019

Hinweis

Der Inhalt dieses Skripts dient als Erklärung und Ergänzung durch Details, Motive, Aufgaben des Lehrstoffs, der in der Vorlesung diskutiert wurde. Ich bin für die Meldung von Fehlern (kleinen und großen) in dem Text sehr dankbar. Bitte eine Email an das elektronische Postfach `gbenedetti@mathi.uni-heidelberg.de` schicken.

Inhaltsverzeichnis

I Differenzierbare Mannigfaltigkeiten 3

1 Motive aus der Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$ 4
- 1.1 Differenzierbare und glatte Abbildungen 4
- 1.2 Koordinatenwechsel 6

2 Topologische Räume 7
- 2.1 Definition von Topologie 7
- 2.2 Erzeugte Topologie und Basen 9
- 2.3 Hausdorffsche Räume 11
- 2.4 Kompaktheit 12
- 2.5 Zusammenhang 13
- 2.6 Stetige Abbildungen 13
- 2.7 Homöomorphismen 15
- 2.8 Aus alten Topologien Neuen schaffen 17
  - 2.8.1 Disjunkte Vereinigung 17
  - 2.8.2 Kartesisches Produkt 18
  - 2.8.3 Initialtopologie 18
  - 2.8.4 Finaltopologie 19

3 Topologische und glatte Mannigfaltigkeiten **20**
3.1 Sphären . . . 22
3.2 Tori . . . 24
3.3 Atlanten und Topologie . . . 25
3.4 Glatte Abbildungen . . . 28
3.5 Glatte Funktionen . . . 32
3.6 Zerlegungen der Eins . . . 35
3.7 Existenz und Klassifizierung von glatten Strukturen . . . 38

4 Der Tangentialraum und das Differential **40**
4.1 Das motivierende Beispiel von Teilmengen in $\mathbb{R}^\ell$ . . . 40
4.2 Die geometrische Definition . . . 41
4.3 Die Definition durch Koordinaten . . . 45
4.4 Die Definition durch Derivationen . . . 45
4.4.1 Richtungsableitungen im $\mathbb{R}^m$ . . . 45
4.4.2 Derivationen an einem Punkt . . . 46

5 Untermannigfaltigkeiten **49**
5.1 Definition von Immersionen und Submersionen . . . 49
5.2 Lokale Darstellung von Immersionen und Submersionen . . . 51
5.3 Charakteristische Eigenschaft von surjektiven Submersionen . . . 51
5.4 Charakteristische Eigenschaft von injektiven Immersionen . . . 52
5.5 Definition von Untermannigfaltigkeiten . . . 54

6 Vektorbündel **58**
6.1 Der Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit . . . 58
6.2 Definition von Vektorbündeln . . . 61
6.3 Rahmen . . . 62
6.4 Kriterium für die Konstruktion von Vektorbündeln . . . 63
6.5 Homomorphismen von Vektorbündeln . . . 64
6.6 Subbündel . . . 65
6.7 Das Pull-Back Bündel . . . 67
6.8 Algebraische Konstruktionen auf Vektorräumen . . . 68
6.8.1 Duale . . . 69
6.8.2 Quotiente . . . 69
6.8.3 Direkte Summe . . . 70
6.8.4 Tensorprodukt . . . 70
6.8.5 Symmetrische und antisymmetrische Tensore . . . 73
6.9 Entsprechende Konstruktionen auf Vektorbündeln . . . 75
6.9.1 Duale . . . 75
6.9.2 Quotiente . . . 77
6.9.3 Direkte Summe . . . 78
6.9.4 Tensorprodukt . . . 79

6.9.5 Symmetrische und antisymmetrische Tensoren 80
6.10 Der Raum der glatten Schnitte eines Vektorbündels 81

7 Tensoren auf Mannigfaltigkeiten **85**
7.1 Pull-Back von kovarianten Tensoren durch Abbildungen 87
7.2 Verwandte kontravariante Tensoren bezüglich Abbildungen 90

8 Vektorfelder und Flüße **94**
8.1 Die Integralkurven eines Vektorfelds 94
8.2 Flüße 96
8.3 Änderung von Tensorfeldern entlang einem Fluß 100
8.4 Die Lie-Klammer und der Kommutator von Flüßen 105

9 Kovariante Ableitung auf Vektorbündeln **109**
9.1 Motive und Definition 109
9.2 Der Raum der kovarianten Ableitungen 111
9.3 Kovariante Ableitungen auf trivialen Bündeln 113
9.4 Lokalität von kovarianten Ableitungen 114
9.5 Pull-Back von kovarianten Ableitungen 115
9.6 Einschränkung von kovarianten Ableitungen auf Kurven und die Parallelverschiebung 117
9.6.1 Vektorbündel über einem Intervall 118
9.6.2 Beliebige Vektorbündel 120
9.7 Die Krümmung 121
9.8 Das äußere Differential von 1-Formen 125
9.9 Die Darstellung der Krümmung in einer Trivialisierung 126
9.10 Kovariante Ableitungen und algebraische Operationen 127
9.11 Kovariante Ableitungen auf dem Tangentialbündel 130

10 Skalarprodukte auf Vektorbündeln **131**
10.1 Linearalgebra 131
10.2 Definition und Existenz 132

Teil I
Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

1 Motive aus der Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

1.1 Differenzierbare und glatte Abbildungen

Die Differentialrechnung in dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ beschäftigt sich mit Eigenschaften differenzierbarer Funktionen.

Definition 1.1. Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt differenzierbar an $p \in \mathbb{R}^n$, wenn es eine lineare Abbildung $\mathrm{d}_pF : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, das so genannte Differential, existiert, sodass

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^n, \quad F(p+h) = F(p) + \mathrm{d}_pF \cdot h + o(p,h), \quad \text{wobei} \quad \lim_{h\to 0} \frac{|o(p,h)|}{|h|} = 0. \tag{1.1}$$

Bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ hat d_pF die Darstellung als eine Matrix mit n-Spalten und m Zeilen (also als Element von $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n,m)$), deren Einträge durch die partiellen Ableitungen

$$(\mathrm{d}_pF)^j_i = \frac{\partial F^j}{\partial x^i}\Big|_p$$

gegeben sind, wobei $F = (F^1, \dots, F^m)$ die Koordinaten von F sind. Falls F an allen $p \in \mathbb{R}^n$ die Bedingung (1.1) erfüllt, sagen wir dass F differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ ist. Wir können in diesem Fall das Differential $\mathrm{d}F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ als Abbildung betrachten. △

Definition 1.2. Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Wir sagen, dass F glatt ist, wenn F unendlich oft differenzierbar ist. Das heißt: F ist differenzierbar, sodass $\mathrm{d}F$ wohldefiniert ist; $\mathrm{d}F$ ist differenzierbar, sodass $\mathrm{d}(\mathrm{d}F)$ differenzierbar ist; und so weiter. Wir schreiben $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, wenn F glatt ist und wir benutzen die kürzere Notation $C^\infty(\mathbb{R}^n) := C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. △

Beispiel 1.3. Die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und alle die Koordinatenfunktionen $x^j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ sind glatt. △

Bemerkung 1.4. Eine Abbildung F ist glatt genau dann, wenn alle ihren Koordinatenfunktionen $F^j = x^j \circ F$ glatt sind. Das heißt:

$$F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, j = 1, \dots, m, \quad F^j \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$ △

Hilfsatz 1.5. *Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist glatt genau dann, wenn die partiellen Ableitungen aller Ordnungen $k \in \mathbb{N}$*

$$\frac{\partial F^j}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_k}}\Big|_p, \qquad j \in \{1, \dots, m\}, \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$$

existieren an allen Punkten $p \in \mathbb{R}^n$ und stetige Funktionen des Punktes $p \in \mathbb{R}^n$ sind. Insbesondere ist F glatt genau dann, wenn die partiellen Ableitungen aller Ordnungen existieren. □

In den nächsten zwei Bemerkungen beschreiben wir die algebraische Struktur auf der Menge der glatten Funktionen und die wichtige Kettenregel für glatte Abbildungen.

Bemerkung 1.6. Die Menge $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ besitzt die Struktur einer $\mathbb{R}$-Algebra. Das heißt: $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ impliziert $\lambda f, f+g, f \cdot g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Summe und Produkte von glatten Funktionen sind glatt). Eine glatte Funktion f besitzt eine multiplikative Inverse $1/f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ (die multiplikative Inverse einer glatten Funktion ohne Nullstellen ist glatt). △

Bemerkung 1.7. Eine entscheidende Eigenschaft von glatten Abbildungen ist, dass sie abgeschlossen unter Verkettung sind. Das folgt aus der klassischen Kettenregel, die besagt: wenn $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar an $p \in \mathbb{R}^n$ ist und $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ differenzierbar an $F(p)$ ist, dann ist $G \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ differenzierbar in p und es gilt

$$\mathrm{d}_p(G \circ F) = \mathrm{d}_{F(p)}G \cdot \mathrm{d}_pF, \tag{1.2}$$

wobei das Produkt auf der rechten Seite als Verkettung von linearer Abbildungen oder Produkt von Matrizen zu verstehen ist. △

Bemerkung 1.8. Wir können auch Abbildungen der Klasse C^k für $k \in \mathbb{N}$ als die Abbildungen definieren, für die die Ableitungen von F bis zu Ordnung k existieren und stetig sind. Wir werden aber immer mit glatten Abbildungen arbeiten, weil die den großen Vorteil haben, dass sie abgeschlossen unter Ableitung sind. Das heißt:

$$F \text{ glatt} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}F \text{ glatt},$$

während $F \in C^k \Rightarrow \mathrm{d}F \in C^{k-1}$. Wir werden eine wichtige Folgerung dieser Eigenschaft sehen, wenn wir den Tangentialraum einer glatten Mannigfaltigkeit definieren werden. △

Bemerkung 1.9. Nach der Gleichung (1.1) sehen wir, dass die Differenzierbarkeit einer Funktion ein lokaler Begriff ist. Das heißt, dass wir annehmen können, dass (1.1) nur für h in einem beliebigen kleinen Ball um p gilt. Daher können wir differenzierbare und dann glatte Funktionen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ definieren. △

Erinnerung 1.10. Eine Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$ ist offen, wenn es um jeden Punkt $p \in U$ einen offenen Ball $B_a(p) \subset U$ gibt. △

Definition 1.11. Wir sagen, dass eine Abbildung $F : U \to V$ glatt um p ist, wenn eine offene Teilmenge $U' \subset U$ mit $p \in U'$ existiert, sodass $F|_{U'} : U' \to V$ glatt ist. △

Wir können glatte Abbildungen auf offenen Teilmengen U benutzen, um sowohl geometrische Objekte wie Kurven $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ und Wellen $\psi : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als auch physikalische Größen wie Kräfte $F : U \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und magnetische Felder $B : U \to \mathbb{R}^3$ darzustellen. Das erlaubt uns die grundlegenden Gesetze der Physik zu formulieren, wie zum Beispiel

$$m\ddot{\gamma} = F(\gamma, \dot{\gamma}), \qquad \nabla \cdot B = 0, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \Delta\psi.$$

1.2 Koordinatenwechsel

Außerdem spielen glatte Abbildungen noch eine wichtige Rolle als Koordinatenwechsel. Es seien dann U_1, U_2 zwei offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und wir bezeichnen mit $x^1, \dots, x^n$ die Koordinaten auf U_1 und mit $y^1, \dots, y^n$ die Koordinaten auf U_2.

Wir nehmen eine Abbildung $F : U_1 \to U_2$ (zuerst ohne anzunehmen, dass F differenzierbar ist), die wir als Koordinatenwechsel betrachten möchten. Also sollte die Abbildung die Punkte in U_1 mit den Punkten in U_2 eindeutig identifizieren, das heißt F sollte bijektiv sein. Des Weiteren sollte F auch eine Bijektion zwischen den glatten Funktionen auf U_1 und den glatten Funktionen auf U_2. Die natürliche Weise zu einer Funktion $f : U_2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion $F^*(f) : U_1 \to \mathbb{R}$ (nicht unbedingt glatt) zuzuordnen ist mittel des Diagramms

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "F"] \arrow[dr, dashed, "f \circ F"'] & U_2. \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

dargestellt. Also setzen wir $F^*(f) := f \circ F$. Die Abbildung $f \mapsto F^*(f)$ gibt eine Bijektion zwischen der Menge der Funktionen auf U_2 und U_1 denn die Inverse ist durch $(F^{-1})^*(f) = g \circ F^{-1}$ gegeben, wobei $F^{-1} : U_2 \to U_1$ die Inverse von F ist.

Wann schränkt sich die Abbildung $f \mapsto F^*(f)$ auf eine wohldefinierte Bijektion zwischen den $C^\infty(U_2)$ und $C^\infty(U_1)$ ein? Da die Koordinaten y^j auf U_2 glatt sind, muss $F^*(y^j) = y^j \circ F$ auch glatt sein. Aus Bemerkung 1.4 folgt es, dass in diesem Fall F glatt ist. Wiederholen wir dieses Argument auf F^{-1} bekommen wir, dass auch F^{-1} glatt sein muss. Nach der Kettenregel ist die Bedingung, dass F und F^{-1} glatt sind, auch ausreichend, um zu haben, dass F^* eine Bijektion zwischen $C^\infty(U_2)$ und $C^\infty(U_1)$. Wir führen daher die folgende Klasse ein.

Definition 1.12. Es sei $F : U_1 \to U_2$ eine Bijektion zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Die Abbildung F heißt (glatter) Diffeomorphismus, falls beide F und F^{-1} glatt sind. △

Satz 1.13. *Die Abbildung $F^* : C^\infty(U_2) \to C^\infty(U_2)$ ist eine Bijektion genau dann, wenn F ein glatter Diffeomorphismus ist.* □

Beispiel 1.14. Eine affine Abbildung

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad F(p) = A \cdot p + p_0,$$

wobei A eine invertierbare Matrix und p_0 ein Vektor ist, ist ein Diffeomorphismus. Die Polarkoordinaten

$$F : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \big([0, +\infty) \times \{0\}\big), \qquad F(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

sind auch ein Diffeomorphismus. △

Beispiel 1.15. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) = x^3$ gegeben ist, ist glatt und bijektiv aber kein Diffeomorphismus, weil ihre Inverse $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ stetig aber nicht differenzierbar (an $x = 0$) ist. △

Bemerkung 1.16. In unserer Diskussion über Koordinatenwechsel haben wir stets angenommen, dass U_1 und U_2 offene Teilmengen des euklidischen Raums derselben Dimension n sind. Allerdings ist diese Bedingung automatisch erfüllt, wie eine Anwendung der Kettenregel zeigt (warum?). △

Unser erstes Ziel wird sein, nun die geometrischen Objekte, physikalischen Größen, Differentialoperatoren (Beschleunigung, Divergenz, Laplace-Operator) und Koordinatenwechsel, die oben erschienen sind, auf allgemeineren Räumen M zu definieren. Nach Bemerkung 1.9 sollten diese Räume lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussehen. Der Begriff von Lokalität ist mathematisch durch die Definition von Topologie gegeben.

2 Topologische Räume

In diesem Abschnitt wiederholen wir einige Vorkenntnissen der Topologie, die von Bedeutung für die Differentialgeometrie sind. Wir geben hier keine Beweise, da die in der Literatur leicht zu finden sind.

2.1 Definition von Topologie

Definition 2.1. Es sei M eine Menge. Eine Topologie auf M ist ein System $\mathcal{T}$ von Teilmengen von M mit der Eigenschaften:

1. die leere Menge $\varnothing$ und die ganze Menge M gehören zu $\mathcal{T}$;
2. wenn $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Elementen der Topologie über eine beliebige Indexmenge I ist, gehört dann die Vereinigung solcher Mengen auch zu der Topologie, d.h.
$$\forall\, i \in I, \quad U_i \in \mathcal{T} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T};$$
3. die Schnittmenge einer endlichen Familie $U_1, \ldots, U_k$ von Elementen der Topologie ist auch Element der Topologie, d.h.
$$\forall\, i = 1, \ldots, k, \quad U_i \in \mathcal{T} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \mathcal{T}.$$

Die Elemente in $\mathcal{T}$ heißen offene Mengen (bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$). Eine Teilmenge C von M heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $C^c = M \setminus C$ offen ist.

Wenn $S \subset M$ eine beliebige Teilmenge von M ist, schreiben wir $\mathring{S}$ für die größte offene Menge, die in S enthalten ist, und $\bar{S}$ für die kleinste abgeschlossene Menge, die S enthält. Wir nennen $\mathring{S}$ das Innere von S und $\bar{S}$ den Abschluss von S.

Es seien $p \in M$ und $S \subset M$. Wir sagen, dass S eine Umgebung von p ist, wenn $p \in \mathring{S}$.

Das Paar $(M, \mathcal{T})$ (oder einfach die Menge M, wenn $\mathcal{T}$ klar vom Kontext ist) heißt topologischer Raum. △

Beispiel 2.2. Es sei M eine Menge. Das System $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$, wobei $\mathcal{T}$ alle die Teilmengen von M enthält, heißt diskrete Topologie. Das System $\mathcal{T} = \{\varnothing, M\}$ heißt indiskrete Topologie. △

Definition 2.3. Wir sagen, dass eine Eigenschaft *lokal* auf M gilt, wenn es für jedes $p \in M$ und jede Umgebung U von p eine Umgebung U' von p mit $U' \subset U$ existiert, die diese Eigenschaft hat. Wir sagen, dass eine Eigenschaft *schwach lokal* auf M gilt, wenn es für jedes $p \in M$ eine Umgebung U von p gibt, die diese Eigenschaft hat. △

Als Beispiel von einer lokalen Eigenschaft können wir die folgende geben.

Definition 2.4. Eine Familie $\{S_i\}_{i \in I}$ von Teilmengen eines topologischen Raums M heißt (schwach) lokal endlich, wenn es für alle $p \in M$ eine Umgebung U von p gibt, sodass $S_i \cap U \neq \varnothing$ nur für endlich viele Indizes $i \in I$. △

Bemerkung 2.5. Der Abschluss $\bar{S}$ von S kann intuitiv verstanden werden als die Menge der Punkte in M, die nah an S liegen. Da S abgeschlossen genau dann ist, wenn $\bar{S} = S$ gilt, sind in diesem Sinne abgeschlossene Mengen, diejenigen Teilmengen von M, die alle ihre nahen Punkte enthalten.

Andererseits kann das Innere $\mathring{S}$ einer Menge S verstanden werden, als die Menge der Punkte in M, die von S vollständig umgegeben sind. Das heißt, dass kein Punkt des Komplements von S nah an $\mathring{S}$ ist. Da S offen ist genau dann, wenn $\mathring{S} = S$ gilt, sind in diesem Sinne offene Mengen diejenigen Teilmengen von M, die alle ihre Punkte vollständig umgeben. △

Aufgabe 2.6. Es sei M ein topologischer Raum und $S \subset M$ eine Teilmenge. Zeigen Sie: für alle $U \subset M$ offen gilt

$$S \cap U \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{S} \cap U \neq \varnothing. \qquad △$$

Wir schließen diesen ersten Abschnitt mit einem Satz über Abschlüsse und lokal endliche Familien, die Anwendung in der Konstruktion von Zerlegungen der Eins auf Mannigfaltigkeiten findet.

Hilfsatz 2.7. *Es sei $\{S_i\}_{i \in I}$ eine lokal endliche Familie von Teilmengen eines topologischen Raums M. Dann gilt*

$$\overline{\bigcup_{i \in I} S_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{S}_i.$$

Beweis. Ohne die lokale Endlichkeit zu benutzen, sehen wir, dass für alle $i' \in I$ gilt

$$S_{i'} \subset \bigcup_{i \in I} S_i \quad \Longrightarrow \quad \bar{S}_{i'} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} S_i}.$$

Diese Inklusion stimmt für alle $i' \in I$ und deshalb

$$\bigcup_{i' \in I} \bar{S}_{i'} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} S_i}.$$

Um die andere Inklusion zu zeigen, beweisen wir nun, dass

$$\Big(\bigcup_{i\in I}\bar{S}_i\Big)^c \subset \Big(\overline{\bigcup_{i\in I}S_i}\Big)^c.$$

Es sei dann $p \notin \cup_{i\in I}\bar{S}_i$. Das heißt, dass $p \in (\bar{S}_i)^c$, für alle $i \in I$. Da $\{S_i\}_{i\in I}$ lokal endlich ist, gibt es U offen mit $p \in U$ und eine Teilmenge $I_p \subset I$, sodass I_p endlich ist und $U \cap S_i = \varnothing$ für alle $i \notin I_p$. Dann ist die Menge

$$U' := U \cap \bigcap_{i\in I_p}(\bar{S}_i)^c$$

offen (warum?) und

$$U' \cap \Big(\bigcup_{i\in I}S_i\Big) = \varnothing. \text{ Also } \; p \notin \overline{\bigcup_{i\in I}S_i}. \qquad \square$$

2.2 Erzeugte Topologie und Basen

Definition 2.8. Es sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $S \subset M$ eine beliebige Teilmenge. Wir können auch S mit einer Topologie $\mathcal{T}_S$ versehen: $\mathcal{T}_S =: \{S \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$. Wir nennen $\mathcal{T}_S$ die Teilraumtopologie. △

Da eine beliebige Vereinigung von offenen Mengen noch offen ist, besteht normalerweise eine Topologie aus sehr vielen offenen Mengen. Es ist daher wichtig kleinere Familien von offenen Mengen zu identifizieren, die die ganze Topologie eindeutig bestimmen.

Definition 2.9. Es sei $\mathcal{S}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von M. Wir können eine Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ erzeugen, indem wir sagen, dass U offen ist, genau dann, wenn für alle $p \in U$ eine endliche Familie $S_1, \ldots, S_k$ von Elementen in $\mathcal{S}$ mit

$$p \in \bigcap_{i=1}^{k} S_i \subset U$$

existiert (Warum ist $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ eine Topologie?). Wir benutzen hier die Konvention, dass die Schnittmenge einer leeren Familie von Teilmengen in M gleich M ist. Wir sagen dann, dass $\mathcal{S}$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist. △

Definition 2.10. Es sei $\mathcal{T}$ eine Topologie und $\mathcal{S}$ eine Teilmenge von $\mathcal{T}$. Wir sagen, dass $\mathcal{S}$ eine Subbasis ist, wenn $\mathcal{S}$ die Topologie $\mathcal{T}$ erzeugt, d,h. $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}$. Wir sagen, dass $\mathcal{S}$ eine Basis für $\mathcal{T}$ ist, wenn für alle $U \in \mathcal{T}$ und alle $p \in U$ ein Element $B \in \mathcal{S}$ existiert mit $p \in B \subset U$. Eine Basis ist also eine Subbasis, wobei die endliche Familie von Definition 2.9 nur aus einem Element besteht. △

Beispiel 2.11. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Das heißt, dass $d : M \times M \to [0, +\infty)$ eine Abstandsfunktion ist. Sie erfüllt nämlich die folgende drei Eigenschaften für alle $p, q, r \in M$:

Trennung: $d(p,q) = 0$ genau dann, wenn $p = q$;

Symmetrie: $d(p,q) = d(q,p)$;

3-Ecksungleichung: $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$.

Zum Beispiel, wenn $|\cdot|$ eine Norm auf einem Vektorraum V ist (wie die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$), liefert $d_{|\cdot|}(p,q) := |q-p|$ eine Abstandsfunktion.

Wir definieren die offenen Bälle mit Mittelpunkt $p \in M$ und Radius $a \in \mathbb{R}_+$ als

$$B_a(p) := \{q \in M \mid d(p,q) < a\}.$$

Dann ist die Familie aller offenen Bälle eine Basis für die erzeugte Topologie. △

Aufgabe 2.12. Zeigen Sie, dass $U \in (M,d)$ offen ist, genau dann, wenn für alle $p \in U$ ein $a > 0$ existiert, sodass

$$B_a(p) \subset U.$$

Somit stimmt die Definition von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ in Erinnerung 1.10 mit der obigen Definition bezüglich der durch die euklidische Norm definierten Abstandsfunktion überein. Man kann auch zeigen, dass jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ die selbe Topologie induziert (das stimmt nicht mehr für unendlich dimensionale Vektorräume). △

Wir werden sehen in Aufgabe 2.21, dass es in interessanten Fällen zu viel ist, zu verlangen, dass eine Topologie von einer endlichen Teilmenge der Potenzmenge erzeugt wird. Uns werden dann interessieren die Topologien, die von einer abzählbaren Teilmenge der Potenzmenge erzeugt werden. Die sind genau die Topologien, die eine abzählbare Basis zulassen (warum?).

Definition 2.13. Eine Teilmenge S eines topologischen Raums M heißt dicht, wenn alle offenen Mengen in M mindestens ein Element von S enthalten. △

Beispiel 2.14. Die Menge aller Punkten in $\mathbb{R}^n$ mit rationalen Koordinaten ist eine abzählbare dichte Menge von $\mathbb{R}^n$. △

Hilfsatz 2.15. *Es sei (M,d) ein metrischer Raum und S eine dichte abzählbare Menge für die erzeugte Topologie in M. Es sei weiter $U \subset M$ offen. Dann ist die Menge $S \cap U$ dicht in U. Außerdem ist*

$$\mathcal{B} := \left\{ B_a(s) \;\middle|\; s \in S \cap U,\ a \in \mathbb{Q},\ \exists\, a' > a,\ B_{a'}(s) \subset U \right\}$$

eine abzählbare Basis der Topologie (mit $B_a(s)$ meinen wir den offenen Ball in M und nicht den offenen Ball $B_a(s) \cap U$ in U.

Beweis. Es sei $V \subset U$ offen in U. Da U offen ist, ist V auch offen in M. Daher muss V ein Element von S enthalten. Daraus folgt, dass $S \cap U$ dicht in U ist.

Es sei nun V eine offene Menge in U und $p \in V$ ein Punkt. Da V offen in M ist, gibt es nach Aufgabe 2.12 $b > 0$ mit $B_b(p) \subset V$. Es existiert dann $s \in S \cap B_{b/3}(p)$ und $a \in \mathbb{Q} \cap (b/3, b/2)$. Dann $p \in B_a(s)$ und $B_{2b/3}(s) \subset B_b(p)$, da

$$d(s,q) < 2b/3 \quad \Longrightarrow \quad d(p,q) \leq d(p,s) + d(s,q) < b/3 + 2b/3 = b. \qquad \square$$

Hilfsatz 2.16. *Es sei M ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis. Es sei $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i \in I}$ eine lokal endliche Familie. Dann gibt es eine abzählbare Teilmenge $I' \subset I$, sodass $S_i = \varnothing$ wenn $i \notin I'$.*

Beweis. Es sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis für M. Dann ist auch

$$\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B} \mid \text{existiert endliche } I_B \subset I, \text{ sodass } B \cap S_i = \varnothing \text{ für } i \notin I_B\}$$

eine abzählbare Basis (warum?). Die gewünschte Menge ist dann die abzählbare Vereinigung von endlichen Indexmengen $I' := \cup_{B \in \mathcal{B}'} I_B$. □

2.3 Hausdorffsche Räume

Wie im euklidischen Raum können wir auch auf einem topologischen Raum M konvergente Folgen definieren. Wir sagen, dass eine Folge $(p_k) \subset M$ gegen $p \in M$ konvergiert, wenn für alle Umgebungen U von p eine natürliche Zahl k_U existiert, sodass $p_k \in U$ für alle $k \geq k_U$. Wenn M allgemein ist, kann es aber passieren, dass der Limes einer Folge nicht eindeutig ist (zum Beispiel, wenn $M = \{1, 2\}$ und $\mathcal{T} = \{\varnothing, M\}$). Die Eindeutigkeit ist auf folgenden Räumen gewährleistet.

Definition 2.17. Ein topologischer Raum M heißt hausdorffsch, falls es für jedes Paar distinkter Punkte p_1 und p_2 in M offene Mengen U_1 und U_2 gibt, für die

$$p_1 \in U_1, \quad p_2 \in U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$ △

Bemerkung 2.18. Wenn wir Folgen mit allgemeineren Filtern ersetzen, ist dann die Eigenschaft in der Definition äquivalent zur Eindeutigkeit des Limes. △

Beispiel 2.19. Metrische Räume sind hausdorffsch. Aus der 3-Ecksungleichung folgt, dass $B_{d(p,q)/2}(p)$ und $B_{d(p,q)/2}(q)$ disjunkt sind. △

Beispiel 2.20. Es sei $M = \mathbb{R} \cup \{0'\}$, wobei $0'$ ein Element ist, das in $\mathbb{R}$ nicht liegt, zum Beispiel eine Banane. Wir definieren nun eine Topologie auf M. Wir nehmen die zwei Abbildungen $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R} \to M$, die durch

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \psi_1(x) = x, \qquad \psi_2(x) = \begin{cases} 0' & \text{falls } x = 0, \\ x & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

definiert sind. Wir sagen, dass $U \subset M$ offen ist, falls $\psi_1^{-1}(U)$ und $\psi_1^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{R}$ sind. Dann ist M kein hausdorffscher Raum, da 0 und $0'$ keine disjunkte Umgebungen besitzen. △

Aufgabe 2.21. Zeigen Sie, dass ein unendlicher hausdorffscher Raum M kann von einer endlichen Familie $\mathcal{S}$ in der Potenzmenge von M nicht erzeugt werden. △

2.4 Kompaktheit

Wir fangen an, Überdeckungen einzuführen.

Definition 2.22. Eine Überdeckung einer Menge M ist eine Familie $\mathcal{U} = \{S_i\}_{i\in I}$ von Teilmengen von M, deren Vereinigung die ganze Menge M ist:

$$M = \bigcup_{i\in I} S_i.$$

Eine Überdeckung heißt endlich, wenn die Indexmenge I endliche Kardinalität besitzt. Falls M ein topologischer Raum ist, heißt eine Überdeckung offen, wenn alle ihre Elemente offene Teilmenge von M sind.

Wenn $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ zwei Überdeckungen von M sind, heißt $\mathcal{U}_1$ Teilüberdeckung von $\mathcal{U}_2$, falls alle Elemente von $\mathcal{U}_1$ auch Elemente von $\mathcal{U}_2$ sind. △

Bemerkung 2.23. Wenn $F : M \to N$ eine Abbildung und $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von N sind, ist dann $F^{-1}(\mathcal{U}) := \{F^{-1}(S) \mid S \in \mathcal{U}\}$. △

Definition 2.24. Wir sagen, dass ein topologischer Raum M kompakt ist, wenn jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Eine Teilmenge S von M heißt kompakt, wenn sie bezüglich der Teilraumtopologie von Definition 2.8 kompakt ist. Die Teilmenge S heißt präkompakt in M, wenn der Abschluß $\bar{S}$ kompakt ist. △

Bemerkung 2.25. Nach dem Satz von Heine-Borel sind die kompakten Mengen des $\mathbb{R}^n$ genau diejenige Teilmengen, die abgeschlossen und beschränkt sind. Daher sind alle offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ lokal kompakt. △

Die Beziehung zwischen abgeschlossenen und kompakten Mengen ist in den folgenden zwei Sätzen gegeben.

Satz 2.26. *Es sei M ein kompakter topologischer Raum. Dann sind alle abgeschlossenen Teilmengen von M auch kompakt.* □

Satz 2.27. *Es sei M ein hausdorffscher topologischer Raum. Dann sind alle kompakten Teilmengen von M abgeschlossen.* □

Der obige Satz wird eine entscheidende Rolle bei dem Beweis der Existenz der Zerlegungen der Eins daher der Existenz einer Abstandfunktion auf glatten Mannigfaltigkeiten spielen.

Beispiel 2.28. Wir betrachten das nicht hausdorffsche Beispiel 2.20 nochmal. Die Menge $[-1, 1] \subset M$ ist kompakt aber nicht abgeschlossen. △

Aufgabe 2.29. Es sei M ein hausdorffsch Raum. Zeigen Sie, dass M lokal kompakt genau dann ist, wenn M schwach lokal kompakt ist. △

2.5 Zusammenhang

Definition 2.30. Ein topologischer Raum M heißt zusammenhängend, wenn für alle offenen Mengen U_1, U_2 mit

$$M = U_1 \cup U_2, \qquad \varnothing = U_1 \cap U_2,$$

entweder U_1 oder U_2 leer ist. Eine Teilmenge S von M heißt zusammenhängend, wenn sie bezüglich der Teilmengetopologie von Definition 2.8 zusammenhängend ist. △

Satz 2.31. *Die Intervalle in $\mathbb{R}$ sind zusammenhängend.* □

2.6 Stetige Abbildungen

Definition 2.32. Es sei $F : M \to N$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wir sagen, dass F stetig ist, falls

$$\forall V, \quad V \text{ offene Teilmenge von } N \quad \Longrightarrow \quad F^{-1}(V) \text{ offene Teilmenge von } M. \tag{2.1}$$

Äquivalent ist F stetig, falls

$$\forall S \subset M \quad \Longrightarrow \quad F(\bar{S}) \subset \overline{F(S)}. \tag{2.2}$$

△

Bemerkung 2.33. Die erste Formulierung der Stetigkeit verallgemeinert die übliche Definition durch ϵ und δ im euklidischen Raum (warum?).

Die zweite Formulierung der Stetigkeit verallgemeinert die andere übliche Definition

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} F(x_k) = F(x)$$

für stetige Abbildungen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (warum?). Die zweite Formulierung lässt sich auch sehr gut versprachlichen: die Punkte in M, die nah an S sind, werden abgebildet auf Punkte in N, die nah an dem Bild von S sind. △

Wenn $F : M \to N$ eine Abbildung und S eine Teilmenge von M ist, haben wir selbstverständlich $\overline{F(S)} \subset \overline{F(\overline{S})}$. Also wenn F stetig ist, können wir (2.2) auch als

$$F(\bar{S}) \subset \overline{F(S)} \subset \overline{F(\overline{S})}.$$

schreiben. Diese Bemerkung liefert den folgenden Hilfsatz, der eine Rolle in der Konstruktion von glatten Funktionen auf Mannigfaltigkeiten spielen wird.

Hilfsatz 2.34. *Es sei $F : M \to N$ eine stetige Abbildung und S eine Teilmenge von M. Wenn $F(\bar{S})$ abgeschlossen ist, gilt dann $F(\bar{S}) = \overline{F(S)}$.* □

Aufgabe 2.35. Wenn die Topologie auf N durch eine Teilmenge $\mathcal{S}$ der Potenzmenge erzeugt ist, ist dann genug die Eigenschaft (2.1) für die Elemente von $\mathcal{S}$ zu überprüfen. △

Aufgabe 2.36. Die Verkettung von stetigen Abbildungen ist wieder stetig. △

Wir geben nun ein Kriterium, zu zeigen, dass eine stückweise definierte Funktion, die auf jedem Stück stetig ist, auch global stetig ist.

Satz 2.37. *Es seien M und N topologische Räume.*

1. *Es sei $\{C_i\}_{i\in I}$ eine endliche abgeschlossene Überdeckung von M und $F_i : C_i \to N$ stetige Abbildungen (auf C_i haben wir die Teilraumtopologie), sodass $F_i|_{C_i\cap C_j} = F_j|_{C_i\cap C_j}$ für alle $i, j \in I$.*

   Dann gibt es eine einzige Abbildung $F : M \to N$ mit $F|_{C_i} = F_i$. Diese Abbildung ist stetig.

2. *Es sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M und $F_i : U_i \to N$ stetige Abbildungen (auf U_i haben wir die Teilraumtopologie), sodass $F_i|_{U_i\cap U_j} = F_j|_{U_i\cap U_j}$ für alle $i, j \in I$.*

   Dann gibt es eine einzige Abbildung $F : M \to N$ mit $F|_{U_i} = F_i$. Diese Abbildung ist stetig. □

Kompaktheit und Zusammenhang bleiben durch stetige Abbildungen erhalten.

Satz 2.38. *Es sei $F : M \to N$ eine stetige Abbildung und S eine Teilmenge von M. Wenn S kompakt ist, ist $F(S)$ auch kompakt. Wenn S zusammenhängend ist, ist $F(S)$ auch zusammenhängend.*

Wir können stetige Abbildungen und die Tatsache, dass $[0, 1]$ zusammenhängend ist, benutzen, um die folgende Verfeinerung des Zusammenhangs zu geben.

Definition 2.39. Es sei M ein topologischer Raum. Wir definieren die folgende Äquivalenzrelation auf M: $p \sim q$ falls es eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$ gibt. Die Äquivalenzklassen heißen Wegzusammenhangskomponenten. Wir sagen, dass M wegzusammenhängend ist, falls sie nur eine Wegzusammenhangskomponenten besitzt. Das heißt, dass alle zwei Punkte in M mit einem stetigen Weg γ verbunden werden können. Eine Teilmenge von M heißt wegzusammenhängend, wenn sie bezüglich der Teilraumtopologie wegzusammenhängend ist. △

Aufgabe 2.40. Zeigen Sie, dass der Kamm

$$K := \{0\} \times [0, 1] \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} [0, 1] \times \{1/n\}\Big) \cup [0, 1] \times \{0\}$$

wegzusammenhängend (und daher schwach lokal wegzusammenhängend) ist, aber nicht lokal wegzusammenhängend ist. △

Satz 2.41. *Ein wegzusammenhängender Raum ist zusammenhängend. Es sei $F : M \to N$ eine stetige Abbildung und S eine Teilmenge von M. Wenn S wegzusammenhängend ist, ist $F(S)$ wegzusammenhängend.* □

Beispiel 2.42. Offene Bälle $B_a(p)$ und der ganze euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ sind wegzusammenhängend und daher zusammenhängend. Insbesondere sind offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ lokal wegzusammenhängend. △

Aufgabe 2.43. Sind die folgenden Räume (weg)zusammenhängend oder nicht?

1. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;
3. $\mathbb{R}^2 \setminus S$, wobei $S \subset \mathbb{R}^2$ eine abzählbare Menge ist.
4. $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;
5. $S^1 \setminus \{(3/5, 4/5)\}$;
6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = y^2\}$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ stetig. △

Aufgabe 2.44. Es sei M der nicht hausdorffsche Raum in Beispiel 2.20. Wir nehmen einen beliebigen Punkt $p \notin [-1, 1]$. Ist es wahr, dass alle stetige Wege in M von 0 nach p die Menge $\{-1, 1\}$ schneiden müssen (also gibt es für alle $\gamma : [0, 1] \to M$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = p$ ein $t \in [0, 1]$ mit $\gamma(t) \in \{-1, -1\}$)? △

2.7 Homöomorphismen

Definition 2.45. Es sei $F : M \to N$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wir sagen, dass

- F ein Homöomorphismus ist, wenn F bijektiv mit Inverse $G : N \to M$ ist und beide F und G stetig sind;
- F ein Homömorphismus auf das Bild ist, wenn F injektiv mit Inverse $G : F(M) \to M$ auf dem Bild ist, und beide F und G stetig sind. △

Definition 2.46. Es sei $F : M \to N$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Die Abbildung heißt abgeschlossen, wenn das Bild von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen ist. Die Abbildung heißt offen, wenn das Bild von offenen Mengen offen ist. △

Aufgabe 2.47. Es sei M ein topologischer Raum mit Basis $\mathcal{S}$. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $F : M \to N$ offen ist, genau dann, wenn für alle $S \in \mathcal{S}$ die Menge $F(S)$ offen in N ist. △

Hilfsatz 2.48. *Es sei $F : M \to N$ stetig. Dann ist F abgeschlossen genau dann, wenn $F(\bar{S}) = \overline{F(S)}$ für alle $S \subset M$ gilt.*

Beweis. Die Aussage folgt aus Hilfsatz 2.34. □

Folgerung 2.49. *Es sei $(M, \mathcal{T}_M)$ ein topologischer Raum, $C \subset M$ abgeschlossen und $S \subset C$ eine Teilmenge. Es sei $\mathcal{T}_C$ die Teilraumtopologie auf C. Der Abschluss von S in C bezüglich $\mathcal{T}_C$ und der Abschluss von S in M bezüglich $\mathcal{T}_M$ stimmen überein.*

Beweis. Die Inklusionabbildung $\iota : (C, \mathcal{T}_C) \to (M, \mathcal{T}_M)$ ist stetig und abgeschlossen. Die Aussage folgt dann aus Hilfsatz 2.48. □

Aufgabe 2.50. Zeigen Sie die Folgerung 2.49 direkt aus der Definition vom Abschluss. △

Hilfsatz 2.51. *Es sei $F : M \to N$ eine stetige bijektive Abbildung. Dann ist F ein Homöomorphismus genau dann, wenn F offen ist, genau dann, wenn F abgeschlossen ist. Es sei $F' : M \to N$ eine stetige injektive Abbildung. Falls F offen oder abgeschlossen ist, ist dann F ein Homöomorphismus auf das Bild.* □

Bemerkung 2.52. Die Abbildung

$$F : [0, 1) \to \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \qquad F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

ist stetig, bijektiv aber kein Homöomorphismus, da $F([1/2, 1))$ nicht abgeschlossen ist. △

Es wird wichtig für uns sein, zu verstehen, wenn eine bijektive stetige Abbildung ein Homömorphismus ist. Der nächste Satz besagt, dass das immer der Fall ist, wenn der Definitionsbereich kompakt und der Zielbereich hausdorffsch sind.

Satz 2.53. *Eine stetige Abbildung $F : M \to N$ ist abgeschlossen, wenn M kompakt und N hausdorffsch ist.* □

Beweis. Es sei $C \subset M$ abgeschlossen. Nach Satz 2.26 ist C kompakt. Nach Satz 2.38 ist $F(C)$ kompakt. Nach Satz 2.27 ist $F(C)$ abgeschlossen. □

Wenn der Definitionsbereich der Abbildung nicht kompakt ist, können wir ein komplizierteres Kriterium formulieren mithilfe der folgenden Definition.

Definition 2.54. Eine stetige Abbildung $F : M \to N$ heißt eigentlich, wenn das Urbild von kompakten Mengen kompakt ist. △

Bemerkung 2.55. Nach Satz 2.26 sind alle stetige Abbildungen $F : M \to N$ mit M kompakt eigentlich. △

Satz 2.56. *Es sei $F : M \to N$ eine stetige Abbildung. Es sei angenommen, dass*

- *F eigentlich ist;*
- *N hausdorffsch ist;*
- *$\overline{F(N)}$ ist lokal kompakt bezüglich der Teilraumtopologie. Das heißt: Es gibt für alle $p \in \overline{F(N)}$ eine Umgebung K von p in N mit $K \cap \overline{F(N)}$ kompakt.*

Dann ist F abgeschlossen.

Beweis. Es sei $C \subset M$ abgeschlossen. Für alle $H \subset N$ kompakt ist $F^{-1}(H) \cap C$ kompakt in M denn F ist eigentlich. Dann $F(F^{-1}(H) \cap C) = F(C) \cap H$ (warum gilt diese Gleichung?) ist kompakt nach Satz (2.38).

Es sei nun per Widerspruch angenommen, dass $F(C)$ nicht abgeschlossen ist, sodass es $p \in \overline{F(C)} \setminus F(C)$ gibt. Da $\overline{F(N)}$ lokal kompakt ist, finden wir eine Umgebung H von $p \in N$, sodass $H \cap \overline{F(N)}$ kompakt ist. Dann ist $K := H \cap \overline{F(C)}$ auch kompakt (warum?). Nach dem ersten Teil dieses Beweises ist $J := K \cap F(C)$ kompakt. Diese Menge ist auch kompakt nach Satz 2.27 denn N hausdorffsch ist.

Wir behaupten, dass $\mathring{H} \setminus J$ eine offene Menge von N mit $p \in \mathring{H} \setminus J$ und $f(C) \cap \mathring{H} \setminus J$ ist. Das würde uns einen Widerspruch geben, da $p \in \overline{F(C)}$. Erstens ist $\mathring{H} \setminus J$ offen, da $\mathring{H}$ und $N \setminus J$ offen sind. Zweitens ist $\mathring{H} \setminus J = \mathring{H} \setminus f(C)$, sodass $y \in J$ und $f(C) \cap J = \varnothing$. □

Bemerkung 2.57. Die dritte Voraussetzung im letzten Satz ist erfüllt, wenn die ganze N lokal kompakt ist. Die erste und die dritte Voraussetzung sind erfüllt, wenn M kompakt ist. Also folgt Satz 2.53 aus Satz 2.56. △

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem tiefen Resultat von Brouwer, das uns sagt, dass injektive stetige Abbildungen von einer offenen Menge in $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ offen sind. Daher sind diese Abbildungen Homöomorphismen auf ihren Bilder.

Satz 2.58 (Invarianz der Dimension)**.** *Es sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $F : U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive stetige Abbildung. Dann ist F offen.* □

2.8 Aus alten Topologien Neuen schaffen

In diesem Abschnitt sehen wir vier Verfahren, um eine neue Topologie von alten Topologien zu definieren.

2.8.1 Disjunkte Vereinigung

Es seien M und N topologische Räume. Es seien $\star$ und $\star'$ zwei distinkte Symbole (zum Beispiel $\star := 0 \in \mathbb{N}$ und $\star := 1 \in \mathbb{N}$) und bilden wir die (disjunkte) Vereinigung

$$M \sqcup N := \{(p, \star) \mid p \in M\} \cup \{(q, \star') \mid q \in N\}.$$

Dann haben wir Abbildungen $\iota_1 : M \to M \sqcup N$ und $\iota_2 : N \to M \sqcup N$, die durch

$$\iota_1(p) = (p, \star), \qquad \iota_2(q) = (q, \star')$$

gegeben sind. Wir definieren eine Topologie $\mathcal{T}_{M\sqcup N}$, indem wir sagen, dass $U \in \mathcal{T}_{M\sqcup N}$ offen ist, genau dann, wenn $\iota_1^{-1}(U)$ offen in M und $\iota_2^{-1}(U)$ offen in N sind (warum ist $\mathcal{T}_{M\sqcup N}$ eine Topologie?). Also sind die offenen Mengen in $M \sqcup N$ derart $\iota_1(U_M) \cup \iota_2(U_N)$, wobei U_M offen in M und U_N offen in N sind. Die Topologie $\mathcal{T}_{M\sqcup N}$ hat die folgende universelle Eigenschaft: Es sind Abbildungen $F_1 : M \to X$ und $F_2 : N \to X$ gegeben, wobei X ein topologischer Raum ist. Dann sind F_1 und F_2 stetig genau dann, wenn die Produktabbildung $F_1 \sqcup F_2 : M \sqcup N \to X$ stetig ist (bitte prüfe Sie das), wobei

$$(F_1 \sqcup F_2)(p, \star) = F_1(p), \qquad (F_1 \sqcup F_2)(q, \star') = F_2(q).$$

Bemerkung 2.59. Es gilt: $M \sqcup N$ hat eine abzählbare Basis genau dann, wenn M und N abzählbare Basen besitzen. Es gilt weiter: $M \sqcup N$ ist hausdorffsch, genau dann, wenn M und N hausdorffsch sind. $\triangle$

Aufgabe 2.60. Zeigen Sie: wenn M, N kompakt sind, dann ist auch $M \sqcup N$ kompakt. Wenn $M, N \neq \varnothing$, ist $M \sqcup N$ nicht zusammenhängend. $\triangle$

2.8.2 Kartesisches Produkt

Es seien M und N topologische Räume und es sei $M \times N$ ihr kartesisches Produkt mit Projektionen $\pi_1 : M \times N \to M$ und $\pi_2 : M \times N \to N$. Wir definieren die Topologie $\mathcal{T}_{M\times N}$ auf $M \times N$, als die Topologie, die durch das System

$$\mathcal{S} = \{U_M \times U_N \mid U_M \text{ offen in } M,\ U_N \text{ offen in } N\}$$

erzeugt wird. Dieses System ist eine Basis denn es gilt $S_1, S_2 \in \mathcal{S} \implies S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$. Die Topologie $\mathcal{T}_{M\times N}$ hat die folgende universelle Eigenschaft: Es sind Abbildungen $F_1 : X \to M$ und $F_2 : X \to N$ gegeben, wobei X ein topologischer Raum ist. Dann sind F_1 und F_2 stetig genau dann, wenn die Produktabbildung $(F_1, F_2) : X \to M \times N$ stetig ist (bitte prüfen Sie das).

Bemerkung 2.61. Es gilt: $M \times N$ hat eine abzählbare Basis genau dann, wenn M und N abzählbare Basen besitzen. Es gilt weiter: $M \times N$ ist hausdorffsch, genau dann, wenn M und N hausdorffsch sind. $\triangle$

Aufgabe 2.62. Beweisen Sie, dass die Projektionen $\pi_1 : M\times N \to M$ und $\pi_2 : M\times N \to N$ offene Abbildungen sind. $\triangle$

Aufgabe 2.63. Wenn M, N kompakt sind, ist auch $M \times N$ kompakt. Wenn M, N zusammenhängend sind, ist auch $M \times N$ zusammenhängend. $\triangle$

2.8.3 Initialtopologie

Es sei M eine Menge, N ein topologischer Raum und $F : M \to N$ eine Abbildung. Wir definieren die Initialtopologie $\mathcal{T}_{M,F}$ auf M als $\mathcal{T}_{M,F} := \{F^{-1}(U) \ |U \text{ offen in } N\}$. Diese Topologie hat die folgende universelle Eigenschaft: Eine Abbildung $G : X \to M$ ist stetig genau dann, wenn die Verkettung $F \circ G : X \to N$ stetig ist (bitte prüfen Sie das).

Bemerkung 2.64. Die Teilraumtopologie für eine Teilmenge S eines topologischen Raums M ist die Initialtopologie der Inklusion $\iota : S \to M$, wobei $\iota(p) = p$. Das heißt: $V \subset S$ ist offen in der Teilraumtopologie genau dann, wenn es $U \subset M$ offen gibt, sodass $V = U \cap S$. $\triangle$

Bemerkung 2.65. Wenn N eine abzählbare Basis besitzt, dann besitzt auch die Initialtopologie auf M eine abzählbare Basis. Wenn N hausdorffsch ist, ist die Initialtopologie auf M hausdorffsch genau dann, wenn F injektiv ist. $\triangle$

Es wird oft nützlich sein, die Teilraumtopologie von offenen Teilmengen U von M zu nehmen. In diesem Fall sind die Elemente der Teilraumtopologie, diejenigen offenen Teilmenge von M, die in U enthalten sind. Das impliziert, dass $S \subset M$ ist genau dann offen, wenn für alle $p \in S$ eine offene Umgebung U_p von p in M existiert, sodass $U_p \cap S$ offen in S mit der Teilraumtopologie von U_p.

Eine ähnliche Aussage gilt für S abgeschlossen nicht. Im Allgemein darf $S \subset M$ für alle $p \in V$ eine offene Umgebung U_p von p in M haben, sodass $U_p \cap S$ abgeschlossen in U_p mit der Teilraumtopologie von U_p ist, ohne dass, S abgeschlossen in M ist. Das nächste Resultat zeigt aber, dass S in einer offenen Menge von M abgeschlossen ist.

Satz 2.66. *Es sei S eine Teilmenge eines topologischen Raums M, sodass für alle $p \in S$ eine offene Umgebung U_p von p in M existiert, sodass die Schnittmenge $U_p \cap S$ abgeschlossen in U_p mit der Teilraumtopologie von U_p ist. Dann existiert eine offene Menge $U \subset M$, sodass $S \subset U$ und S abgeschlossen in U mit der Teilraumtopologie von U.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $U_p \setminus S$ offen für alle $p \in M$ in der Teilraumtopologie von U_p und daher auch in der Topologie von M. Wir setzen $U := \cup_{p \in S} U_p$, sodass $S \subset U$ und

$$U \setminus S = \bigcup_{p \in S} (U_p \setminus S).$$

Die Mengen in der Vereinigung auf der rechten Seite sind offen in M und in U enthalten. Daher ist die Vereinigung offen in U. Es folgt daraus, dass S abgeschossen in U ist. □

2.8.4 Finaltopologie

Es sei M ein topologischer Raum, N eine Menge und $F : M \to N$ eine Abbildung. Wir definieren die Finaltopologie $\mathcal{T}^{N,F}$ auf N als $\mathcal{T}^{N,F} := \{U \mid F^{-1}(U) \text{ offen in } M\}$. Diese Topologie hat die folgende universelle Eigenschaft: Eine Abbildung $G : N \to X$ ist stetig genau dann, wenn die Verkettung $G \circ F : M \to X$ stetig ist (bitte prüfen Sie das).

Bemerkung 2.67. Wenn man eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einem topologischen Raum M hat, ist die Quotiententopologie auf $M/\sim$ die Finaltopologie bezüglich der Quotientenabbildung $\pi : M \to M/\sim$, wobei $\pi(p) = [p]$. △

Bemerkung 2.68. Wenn M eine abzählbare Basis besitzt, besitzt dann die Finaltopologie auf N nicht unbedingt eine abzählbare Basis. Wenn M hausdorffsch ist, ist dann die Finaltopologie auf N nicht unbedingt hausdorffsch. △

Aufgabe 2.69. Es sei M ein topologischer Raum, $F : M \to N$ eine Abbildung. Wir versehen N mit der Finaltopologie. Es sei angenommen, dass F surjektiv und offen ist. Zeigen Sie, dass, wenn M eine abzählbare Basis besitzt, dann auch die Finaltopologie auf N eine abzählbare Basis besitzt. △

Aufgabe 2.70. Es sei $F : M \to N$ eine surjektive Abbildung zwischen topologischen Räumen, die stetig und offen ist. Zeigen Sie, dass die Topologie auf N mit der Finaltopologie von F übereinstimmt. △

3 Topologische und glatte Mannigfaltigkeiten

Wir sind nun bereit Räume, die lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussehen, zu definieren.

Definition 3.1. Es sei M ein topologischer Raum. Eine (lokale) Karte der Dimension n auf M ist ein Homöomorphismus $\varphi : U \to V$, wobei U eine offene Teilmenge von M ist und V eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Die Inverse $\varphi : V \to U$ heißt Parametrisierung. Wenn $p \in U$ ist, sagen wir dass φ (bzw. φ^{-1}) eine Karte (bzw. eine Parametrisierung) um p ist. Manchmal bezeichnen wir eine Karte mit dem Paar (U, φ), wenn wir der Definitionsbereich U von φ explizit machen wollen. $\triangle$

Bemerkung 3.2. Wenn $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte um p ist und $F : V \to W$ ein Homöomorphismus mit einer weiteren offenen Teilmenge W des $\mathbb{R}^n$, dann ist $F \circ \varphi : U \to W$ auch eine Karte um p. Es folgt daraus, dass es immer eine Karte φ um p mit $\varphi(p) = 0$ gibt. $\triangle$

Definition 3.3. Eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist ein hausdorffscher Raum mit abzählbarer Basis, sodass es für jede $p \in M$ eine Karte der Dimension n um p gibt. $\triangle$

Bemerkung 3.4. Wir verlangen, dass eine topologische Mannigfaltigkeit M hausdorffsch und mit abzählbarer Basis ist, weil wir eine Zerlegung der Eins auf M haben möchte. Die Existenz solches Objektes hat viele Folgerungen. Zum Beispiel können wir immer M als eingebettete Mannigfaltigkeit in einem $\mathbb{R}^N$ realisieren. Insbesondere ist M ein metrischer Raum. $\triangle$

Bemerkung 3.5. Nach dem Satz der Invarianz der Dimension, wenn M eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n ist, existiert keine Karte auf M der Dimension n' mit $n' \neq n$ (warum?). Insbesondere kann M nicht gleichzeitig eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n und n' mit $n \neq n'$ sein. $\triangle$

Wir möchten nun glatte Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ definieren. Wenn (U_1, φ_1) eine Karte um $p \in M$ ist, wäre es sinnvoll zu sagen, dass f glatt um p ist, falls $f \circ \varphi_1^{-1} : V \to \mathbb{R}$ glatt um $\varphi_1(p)$ nach Definition 1.11 ist.

Allerdings haben wir mehrere lokale Karten um p (siehe Bemerkung 3.2) und die Glattheit von f um p sollte nicht von der Wahl der Karte abhängen. Also wenn (U_2, ϕ_2) eine zweite Karte um p (also $p \in U_1 \cap U_2$) ist, möchten wir

$$\forall\, f : M \to \mathbb{R}, \quad \Big[f_1 := f \circ \varphi_1^{-1} \text{ glatt um } \varphi_1(p) \quad \Longleftrightarrow \quad f_2 := f \circ \varphi_2^{-1} \text{ glatt um } \varphi_2(p)\Big]$$

haben. Wir betrachten die zwei offenen Mengen $V_1' := \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ und $V_2' := \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ mit $\varphi_1(p) \in V_1' \subset V_1$ und $\varphi_2(p) \in V_2' \subset V_2$. Dann ist die Abbildung $\psi := \varphi_2 \circ (\varphi_1^{-1}|_{V_1'}) : V_1' \to V_2'$ ein Homöomorphismus und

$$f_1|_{V_1'} = f \circ \varphi_1^{-1}|_{V_1'} = f \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{V_1'} = (f \circ \varphi_2^{-1}|_{V_2'}) \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{V_1'}) = f_2|_{V_2'} \circ \psi.$$

Da f_1 glatt um $\varphi_1(p)$ genau dann ist, wenn $f_1|_{V_1'}$ glatt um $\varphi_1(p)$ ist und ähnlich für f_2 sehen wir aus Abschnitt 1.2, dass ψ und ψ^{-1} müssen glatt um $\varphi_1(p)$ und $\varphi_2(p)$ sein.

Da p ein beliebiger Punkt in $U_1 \cap U_2$ ist, geben wir die folgende Definition.

Definition 3.6. Zwei Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) auf einer topologischen Mannigfaltigkeit heißen verträglich, wenn die Einschränkung

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

ein glatter Diffeomorphismus ist. Wir nennen $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ die Übergangsabbildung zu der Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2). $\triangle$

Beispiel 3.7. Es sei (U, φ) eine Karte auf M. Dann für jede offene Teilmenge $U' \subset U$ ist $(U', \varphi|_{U'})$ eine Karte, die verträglich mit φ ist, da die Übergangsabbildung die Identität auf U' ist. $\triangle$

Also um glatte Funktionen auf M zu definieren, müssen wir nun eine Familie von Karten auswählen, die verträglich mit einander sind und deren Definitionsbereiche M überdecken.

Definition 3.8. Ein (glatter) Atlas $\mathcal{A}$ auf einem topologischen Raum M ist eine Familie von Karten $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$, die paarweise verträglich sind und deren Definitionsbereiche eine offene Überdeckung von M sind. Das heißt

- $\forall\, i, j \in I, \qquad (U_i, \varphi_i)$ und (U_j, φ_j) sind verträglich,
- $M = \bigcup_{i \in I} U_i.$

Zwei Atlanten $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ heißen äquivalente, wenn alle $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ und $(U', \varphi') \in \mathcal{A}'$ verträglich miteinander sind (prüfen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist). Eine Äquivalenzklasse $\tilde{\mathcal{A}}$ von Atlanten heißt differenzierbare Struktur auf M. $\triangle$

Bemerkung 3.9. Wenn der Raum M in der Definition 3.8 hausdorffsch und mit abzählbarer Basis ist, impliziert die Existenz eines glatten Atlas automatisch, dass M eine topologische Mannigfaltigkeit ist. $\triangle$

Bemerkung 3.10. Es sei $\mathcal{A}$ ein Atlas und (U', φ') eine Karte auf M. Dann ist $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{(U', \varphi')\}$ auch ein Atlas genau dann, wenn (U', φ') mit allen Karten in $\mathcal{A}$ verträglich ist. In diesem Fall gilt $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$. $\triangle$

Bemerkung 3.11. Es sei $\tilde{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzklasse von Atlanten. Wir definieren

$$\mathcal{A}_{\max} := \bigcup_{\mathcal{A} \in \tilde{\mathcal{A}}} \mathcal{A}.$$

Dann ist $\mathcal{A}_{\max}$ der einzige maximale Atlas in $\tilde{\mathcal{A}}$ bezüglich der Inklusion. Wir benutzen dann die ziemlich unpräzise Schreibweise $(U, \varphi) \in \tilde{\mathcal{A}}$, um zu meinen, dass $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ für irgendwelchen $\mathcal{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ oder gleichwertig $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\max}$. Daher werden in der Literatur differenzierbare Strukture auch als maximale Atlanten definiert. $\triangle$

Definition 3.12. Eine glatte Mannigfaltigkeit ist ein Paar $(M, \tilde{\mathcal{A}})$, wobei M eine topologische Mannigfaltigkeit ist, und $\tilde{\mathcal{A}}$ eine glatte Struktur auf M. Wir werden oft einfach sagen, dass M eine glatte Mannigfaltigkeit ist. In diesem Fall nehmen wir an, dass auf M eine glatte Stuktur $\tilde{\mathcal{A}}$ festgelegt ist. △

Definition 3.13. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit heißt glatt (bezüglich der glatte Struktur $\tilde{\mathcal{A}}$), genau dann, wenn, gegeben $\mathcal{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$, für alle Karten $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ die Funktion $f \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{R}$ glatt nach der Definition 1.2 ist. Wir schreiben $C^\infty(M)$ für die Menge der glatten Funktionen auf M. △

Aufgabe 3.14. Zeigen Sie, dass die Definition von glatten Funktionen nicht von der Wahl des Atlas in der Äquivalenzklasse abhängt. Zeigen Sie auch, dass $f : M \to \mathbb{R}$ glatt ist, genau dann, wenn es für alle $p \in M$ eine Karte $(U, \varphi) \in \tilde{\mathcal{A}}$ um p gibt, für die $f \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{R}$ glatt ist. △

Bemerkung 3.15. Nach Bemerkung 1.6 ist $C^\infty(M)$ eine $\mathbb{R}$-algebra. △

Beispiel 3.16. Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Da $\mathbb{R}^n$ hausdorffsch nach Beispiel 2.11 und mit abzählbarer Basis nach Hilfsatz 2.15 ist, besitzt auch V diese Eigenschaft nach Bemerkung 2.65. Dann ist (V, id) eine Karte auf V. Da schon diese Karte die ganze V überdeckt, ist $\mathcal{A} = \{(V, \mathrm{id})\}$ ein glatter Atlas und somit ist V mit diesem kanonischen Atlas eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n. Allgemeiner, wenn $\varphi : V \to V'$ ist ein Homöomorphismus mit einer anderen offenen Menge des $\mathbb{R}^n$ ist auch $\mathcal{A}' = \{(V, \varphi)\}$ ein glatter Atlas. Wann ist $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$, also (V, id) verträglich mit (V, φ)? Nach der Definition 3.6 passiert das genau dann, wenn φ ein glatter Diffeomorphismus ist. △

Beispiel 3.17. Es sei $\mathcal{A}$ ein Atlas auf M und $U \subset M$ eine offene Menge. Dann ist auch U hausdorffsch und mit abzählbarer Basis. Wir definieren einen Atlas auf U als

$$\mathcal{A}_U := \{(W \cap U, \varphi|_{W \cap U}) \mid (W, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

(beweisen Sie, dass $\mathcal{A}_U$ ein Atlas ist). Daher ist $(U, [\mathcal{A}_U])$ eine glatte Mannigfaltigkeit mit $\dim U = \dim M$. △

Beispiel 3.18. Es sei H ein reeller Vektorraum der Dimension n. Dann liefert jede Basis $v_1, \ldots, v_n$ eine Karte $\varphi : H \to \mathbb{R}^n$, wobei wir H mit der durch φ induzierten Initialtopologie versehen ist. Alle die Karten, die wir auf dieser Weise bekommen, sind verträglich miteinander, da die Übergangsabbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch die invertierbare Matrix des Koordinatenwechsel gegeben sind. Somit ist $[\{(H, \varphi)\}]$ eine kanonische differenzierbare Struktur auf H, die kompatibel mit der linearen Struktur ist (nach der Definition, die wir später geben, sind zum Beispiel, lineare Abbildungen glatt). △

3.1 Sphären

Wir konstruieren nun einen glatten Atlas auf der euklidischen n-Sphäre mit Radius $r > 0$

$$S_r^n := \left\{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = r^2\right\},$$

die wir mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^{n+1}$ versehen. Da S^n_r abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, ist S^n_r auch kompakt.

Wir definieren für $i = 1, \ldots, n+1$ die $2(n+1)$ Karten $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$

- $U_i^\pm := \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n \mid \pm x_i > 0\}$,
- $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to B^n_r(0), \quad \varphi_i^\pm(x^1, \ldots, x^{n+1}) = (x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1})$,

wobei das Zeichen $\widehat{x^i}$ heißt, dass wir die Koordinate x^i weglassen. Also ist $\varphi_i^\pm$ die Einschränkung auf $U_i^\pm$ der Projektion $\pi_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ entlang der i-ten Koordinate. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{A} = \{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}_{i=1}^{n+1}$ ein glatter Atlas ist.

Schritt 1 *Die Abbildung $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to B^n_r(0)$ ist eine Karte*: Die Menge $U_i^\pm$ ist die Schnittmenge zwischen einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ und S^n, sodass $U_i^\pm$ offen in S^n ist. Die Menge $B^n_r(0)$ ist offen in $\mathbb{R}^n$. Die Abbildung $\varphi_i^\pm$ ist stetig, da Einschränkung der stetigen Abbildung π_i auf S^n. Die Inverse ist gegeben durch

$$\psi_i^\pm : B^n_r(0) \to U_i^\pm, \qquad \psi(y^1, \ldots, y^n) = (y^1, \ldots, \pm\sqrt{r^2 - |y|^2}, \ldots, y^n).$$

Die Verkettung von $\psi_i^\pm$ und der Inklusion $U_i^\pm \to \mathbb{R}^{n+1}$ ist stetig, da alle Koordinaten stetig sind (dank der Definition der Produkttopologie oder der universellen Eigenschaft des kartesischen Produkts). Daher ist auch $\psi_i^\pm$ stetig (dank der Definition der Teilraumtopologie oder der universellen Eigenschaft der Initialtopologie). Daher ist $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$ eine Karte der Dimension n.

Schritt 2 *Die Sphäre S^n ist eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n*: Da $\mathbb{R}^{n+1}$ hausdorffsch und mit abzählbarer Basis ist, ist S^n mit der Teilraumtopologie auch hausdorffsch und mit abzählbarer Basis. Wir wissen schon, dass die $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$ Karten sind. Daher bleibt nur zu zeigen, dass es für alle $p \in S^n$ eine Menge $U_i^\pm$ gibt, sodass $p \in U_i^\pm$. Aber $p = (x^1, \ldots, x^{n+1})$ und die Summe der Quadrate der Koordinaten ist gleich $r > 0$. Also muss es eine Koordinate x^i von p mit $x^i \neq 0$ geben. Wenn $x^i > 0$, dann $p \in U_i^+$ und wenn $-x^i > 0$, dann $p \in U_i^-$.

Schritt 3 *Die Karten sind verträglich miteinander*: Es seien i, j zwei Indizes in $\{1, \ldots, n+1\}$. Wir müssen zeigen, dass die vier Paare $(\varphi_i^+, \varphi_j^+)$, $(\varphi_i^+, \varphi_j^-)$, $(\varphi_i^-, \varphi_j^+)$ und $(\varphi_i^-, \varphi_j^-)$ verträglich sind. Da $U_i^+ \cap U_i^- = \varnothing$, können wir annehmen, dass $i < j$. Wir betrachten nur das zweite Paar $(\varphi_i^+, \varphi_j^-)$. Die anderen lassen sich auf ähnliche Weise behandeln. Wir haben $U_i^+ \cap U_j^- = \{p \in S^n \mid x^i > 0,\ -x^j > 0\}$ und

$$\varphi_i^+(U_i^+ \cap U_j^-) = \{y \in B^n_r(0) \mid -y^{j-1} > 0\}, \qquad \varphi_j^-(U_i^+ \cap U_j^-) = \{y \in B^n_r(0) \mid y^i > 0\}.$$

Die Übergangsabbildung $\varphi_j^- \circ (\varphi_i^+)^{-1} : \{-y^{j-1} > 0\} \to \{y^i > 0\}$ ist

$$\varphi_j^- \circ (\varphi_i^+)^{-1}(y^1, \ldots, y^n) = (y^1, \ldots, +\sqrt{r^2 - |y|^2}, \ldots, \widehat{y^{j-1}}, \ldots, y^n)$$

mit Inverse

$$\varphi_i^+ \circ (\varphi_j^-)^{-1}(y^1, \ldots, y^n) = (y^1, \ldots, \widehat{y^i}, \ldots, -\sqrt{r^2 - |y|^2}, \ldots, y^n).$$

Beide Abbildungen sind glatt, da $|y| < r$.

Aufgabe 3.19. Zeigen Sie, dass der Atlas $\{\sigma_{\text{Nord}}, \sigma_{\text{Sud}}\}$ aus Aufgabe 4.5, der aus den stereographischen Projektionen aus dem Nord- und Südpol besteht, äquivalent zum obigen Atlas ist. △

3.2 Tori

Wir konstruieren nun einen glatten Atlas auf dem n-Torus

$$\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$$

Also ist $\mathbb{T}^n$ der Quotientenraum von $\mathbb{R}^n$ durch die Äquivalenzrelation $\sim$, wobei $x \sim x'$ genau dann, wenn $x - x' \in \mathbb{Z}^n$. Hier bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}^n$ die Menge der Punkte, die ganzzahlige Koordinaten haben. Wir versehen $\mathbb{T}^n$ mit der durch die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ induzierten Quotiententopologie.

Aufgabe 3.20. Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}^n$ homöomorph zu $(\mathbb{T}^1)^n$ ist. △

Satz 3.21. *Die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ ist offen. Der Torus $\mathbb{T}^n$ ist hausdorffsch mit abzählbarer Basis.*

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir behaupten, dass $\pi(U)$ offen in $\mathbb{T}^n$ ist. Nach der Definition der Finaltopologie passiert das genau dann, wenn $\pi^{-1}(\pi(U))$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist. Wir haben

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^n} \tau_k(U),$$

wobei $\tau_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Verschiebung $\tau_k(x) = x + k$ ist. Wir bemerken, dass τ_k ein Homöomorphismus ist und daher offene Mengen auf offene Mengen abbildet. Dann ist die rechte Seite offen denn sie ist die Vereinigung von offenen Mengen.

Die Tatsache, dass $\mathbb{T}^n$ eine abzählbare Basis besitzt folgt aus Aufgabe 2.69.

Wir zeigen nun, dass $\mathbb{T}^n$ hausdorffsch ist. Es seien $[p]$ und $[q]$ distinkte Punkte auf $\mathbb{T}^n$. Dann ist $p - q \notin \mathbb{Z}^n$. Da $\mathbb{Z}^n$ abgeschlossen ist, gibt es $\epsilon > 0$, sodass $p - q + x \notin \mathbb{Z}^n$ für alle $x \in B^n_\epsilon(0)$. Wir betrachten dann die offenen Umgebungen von $[p]$ und $[q]$

$$U_1 := \pi(B^n_{\epsilon/2}(p)), \qquad U_2 := \pi(B^n_{\epsilon/2}(q)).$$

Es gilt $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Wenn $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ gälte, würde es $y, z \in B^n_{\epsilon/2}$ mit der Eigenschaft geben, dass $(p+y)-(q+z) \in \mathbb{Z}^n$. Wir setzen dann $x = y-z$ und sehen, dass $p-q+x \in \mathbb{Z}^n$ aber $|x| \le |y| + |z| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, was der Eigenschaft von ϵ widerspricht. □

Wir fangen an, einen Atlas für $n = 1$ zu definieren. Für alle $t \in \mathbb{R}$ sei (U_t, φ_t) die Karte

$$U_t := \mathbb{T}^1 \setminus \{[t]\}, \qquad \varphi_t : U_t \to (t, t+1), \quad \varphi_t([x]) := x,$$

wobei x der einzige Repräsentant von $[x]$ ist, der in $(t, t+1)$ liegt. Die Umkehrabbildung ist $(\varphi_t)^{-1}(x) = [x]$, also $\varphi_t^{-1} = \pi|_{(t,t+1)}$. Daher ist $(\varphi_t)^{-1}$ stetig und offen. Wir schließen daraus, dass φ_t ein Homöomorphismus ist. Wir zeigen nun, dass (U_t, φ_t) und (U_s, φ_s) verträglich sind. Wir haben zwei Möglichkeiten.

Falls $s - t \in \mathbb{Z}$**:** Dann $U_t = U_s$ und $\varphi_t \circ \varphi_s^{-1}(x) = x + (t - s)$, die offensichtlich ein Diffeomorphismus zwischen $(s, s+1)$ und $(t, t+1)$ ist.

Falls $s - t \notin \mathbb{Z}$**:** Dann gibt es $s' \in (t, t+1)$ und $t' \in (s, s+1)$, sodass $s - s' \in \mathbb{Z}$ und $t - t' \in \mathbb{Z}$. Es gilt $s' - t = s + 1 - t'$ und $\varphi_t \circ \varphi_s^{-1} : (s, t') \cup (t', s+1) \to (t, s') \cup (s', t+1)$ ist gegeben durch

$$\varphi_t \circ \varphi_s^{-1}(x) = \begin{cases} x + (s' - s) & \text{falls } x \in (s, t') \\ x + (t - t') & \text{falls } x \in (t', s). \end{cases}$$

Also ist die Einschränkung von $\varphi_t \circ \varphi_s^{-1}$ auf den beiden Intervallen eine Verschiebung und somit ist $\varphi_t \circ \varphi_s^{-1}$ ein Diffeomorphismus.

Dann ist $\mathcal{A}_{\mathbb{T}^1} = \{(U_t, \varphi_t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ein Atlas und $(\mathbb{T}^1, [\mathcal{A}_{\mathbb{T}^1}])$ eine glatte Mannigfaltigkeit.

Um zu zeigen, dass $\mathbb{T}^n$ die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit hat, benutzen wir das folgende Resultat. Es besagt, dass ein Produkt zwei Mannigfaltigkeiten wieder eine Mannigfaltigkeit ist. Der Beweis ist unmittelbar und eine Aufgabe für Sie.

Hilfsatz 3.22. *Es seien M_1 und M_2 zwei topologische Mannigfaltigkeiten mit glatten Atlanten $\mathcal{A}_{M_1} = \{(U_i^1, \varphi_i^1)\}_{i \in I}$ und $\mathcal{A}_{M_2} = \{(U_j^2, \varphi_j^2)\}_{j \in J}$. Das Produkt $M_1 \times M_2$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit glattem Atlas*

$$\mathcal{A}_{M_1 \times M_2} := \{(U_i^1 \times U_j^2, \varphi_i^1 \times \varphi_j^2)\}_{(i,j) \in I \times J}.$$

Daher gilt $\dim(M_1 \times M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$. □

Also: Wenn $(\mathbb{T}^1, [\mathcal{A}_{\mathbb{T}^1}])$ der glatte 1-Torus ist, bekommen wir den glatten n-Torus als

$$(\mathbb{T}^n, [\mathcal{A}_{(\mathbb{T}^1)^n}]),$$

wobei wir $\mathbb{T}^n$ mit $(\mathbb{T}^1)^n$ nach Aufgabe 3.20 identifiziert haben.

Aufgabe 3.23. Es seien M_1 und M_2 topologische Mannigfaltigkeiten derselben Dimension mit Atlanten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$. Zeigen Sie, dass $M_1 \sqcup M_2$ eine topologische Mannigfaltigkeit derselben Dimension mit Atlas $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$ ist. △

3.3 Atlanten und Topologie

Es folgt aus der Bemerkung 3.9, dass ein topologischer Raum M, der einen glatten Atlas $\mathcal{A}$ besitzt, eine glatte Mannigfaltigkeit ist, sobald die Topologie auf M hausdorffsch und mit abzählbarer Basis ist. Nun werden wir bemerken, dass die Topologie auf M ganz von dem Atlas $\mathcal{A}$ bestimmt wird.

Hilfsatz 3.24. *Es sei M eine Menge und $\mathcal{A} := \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ eine Familie mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $\{U_i\}_{i\in I}$ *ist eine Überdeckung von* M *ist,*

2. *für alle* $i \in I$ *sind* $\varphi_i : U_i \to V_i$ *Bijektionen mit offenen Mengen* V_i *der* $\mathbb{R}^n$*,*

3. *für alle* $i, j \in I$ *sind die Mengen* $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ *und* $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ *offen und*
$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \quad \text{ein Diffeomorphismus ist.}$$

Dann gibt es eine einzige Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ *auf* M*, sodass* $\mathcal{A}$ *ein glatter Atlas ist. Insbesondere, wenn diese Topologie hausdorffsch um mit abzählbarer Basis ist, besitzt* M *die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit. Das passiert, zum Beispiel, wenn die zwei Bedingungen*

4. $\mathcal{A}$ *ist abzählbar;*

5. *für alle* $p_1, p_2 \in M$ *gibt es entweder* $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ *mit* $p_1, p_2 \in U$*, oder gibt es* $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}$*, sodass* $U_1 \cap U_2 = \varnothing$*,* $p_1 \in U_1$ *und* $p_2 \in U_2$*.*

erfüllt sind.

Beweis. Es sei $\mathcal{T}_\mathcal{A} := \{U \subset M \mid \varphi_i(U \cap U_i) \text{ offen in } \mathbb{R}^n, \text{ für alle } i \in I\}$. Dann ist es leicht zu sehen, dass $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ eine Topologie auf M definiert. Außerdem seien $\mathcal{B}_i$ abzählbare Basen für V_i. Wir behaupten, dass
$$\mathcal{B} = \bigcup_{i\in I} \varphi_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$$
eine Basis für $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ ist. Es sei $U_j' \subset U_j$, sodass $V_j' := \varphi_j(U_j') \in \mathcal{B}_j$. Es sei nun (U_i, φ_i) beliebig. Dann ist
$$\varphi_i(U_j' \cap U_i) = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(V_j' \cap \varphi_j(U_j \cap U_i))$$
offen nach Eigeschaft 3. Daher $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_\mathcal{A}$. Es sei nun $U \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$. Dann
$$U = \bigcup_{i\in I} \varphi_i^{-1}(\varphi_i(U \cap U_i)).$$
Da alle $\varphi_i(U \cap U_i)$ Vereinigung von Elementen in $\mathcal{B}_i$ sind, ist U Vereinigung von Elementen in $\mathcal{B}$. Die Mengen U_i sind offen in $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ als Vereinigung von Elementen in $\varphi_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$. Außerdem sind die Abbildungen φ_i stetig, da $\varphi_i^{-1}(\mathcal{B}_i) \subset \mathcal{T}_\mathcal{A}$, und offen, da $U_i' \subset U_i$ offen nach der Definition von $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ die Bedingung $\varphi_i(U_i')$ offen in $\mathbb{R}^n$ impliziert.

Die obigen Überlegungen zeigen, dass $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ $\mathcal{A}$ einen glatten Atlas macht. Es sei nun Umgekehrt $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit Atlas $\mathcal{A}$. Dann gilt $\mathcal{T}_\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$. Andererseits sei $U \in \mathcal{T}$. Dann ist $\varphi_i(U \cap U_i)$ offen in $\mathbb{R}^n$. Also $U \in \mathcal{T}_\mathcal{A}$.

Es sei nun die Bedingung 4 angenommen. Dann ist $\mathcal{B}$ als abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen auch abzählbar. Es sei nun die Bedingung 5 angenommen und $p_1, p_2 \in M$ distinkt. Wenn es eine Karte (U, φ) mit $p_1, p_2 \in U$ gibt, können wir dann p_1 und p_2 in U mit zwei Umgebungen trennen, da U als homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ hausdorffsch ist. Die Umgebungen sind dann auch Umgebungen in M, da U offen in M ist. Wenn es zwei Karten mit $p_1 \in U_1$ und $p_2 \in U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ gibt, dann sind die zwei Punkte schon getrennt, da U_1 und U_2 offen sind. $\square$

Nach Hilfsatz 3.24 bekommen wir, dass M hausdorffsch und mit abzählbarer Basis ist, wenn der Atlas die Bedingung 4 und 5 erfüllt. Umgekehrt können wir einen Atlas mit diesen Eigenschaften für jede glatte Mannigfaltigkeit finden. Das wird im nächsten Hilfsatz gemacht, wo wir ein genaueres Resultat bekommen, das eine wichtige Rolle in der Existenz von Zerlegungen der Eins spielt.

Hilfsatz 3.25. *Es sei M ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis, der einen glatten Atlas $\mathcal{A}$ besitzt. Es existiert eine weitere abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{B_i\}$ von M mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $i \in I$ gibt es eine Karte $\varphi_i : U_i \to V_i$ von $\mathcal{A}$, sodass $\varphi_i(B_i) = B_{a_i}(q_i)$ und $\overline{B_{a_i}(q_i)} \subset V_i$.*

Somit ist $\mathcal{A}' := \{(B_i, \varphi_i' := \varphi_i|_{B_i})\}_{i\in I}$ ein abzählbarer Atlas von $\mathcal{M}$, wobei die Definitionsmengen der Karten eine präkompakte Basis bilden. Wenn insbesondere M auch hausdorffsch ist, existieren für alle Paare von distinkten Punkten $p_1, p_2 \in M$ Karten $(B_{i_i}, \varphi_{i_1}'), (B_{i_2}, \varphi_{i_2}')$ mit

$$B_{i_1} \cap B_{i_2} = \varnothing, \quad p_1 \in B_{i_1}, \quad p_2 \in B_{i_2}.$$

Beweis. Es sei $\mathcal{W} = \{W_j\}_{j\in J}$ eine abzählbare Basis von M. Wir definieren

$$\mathcal{W}' := \{W_j \in \mathcal{W} \mid W_j \subset U,\ (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}\} = \{W_j\}_{j\in J'}$$

für irgendwelche Indexmenge $J' \subset J$. Dann ist $\mathcal{W}'$ eine abzählbare Basis denn für alle $W \subset M$ offen und $p \in W$ gibt es eine Karte (U_j, φ_j) um p und $W_j \in \mathcal{W}$ mit $p \in W_j \subset U_j \cap W$. Nun gibt es nach Hilfsatz 2.15 für alle $j \in J'$ eine abzählbare Basis $\mathcal{B}_j$ von $\varphi_j(W_j)$, deren Elemente Bälle mit Abschluß in $\varphi_j(U_j)$ sind. Die gewünschte Basis ist

$$\mathcal{B} := \bigcup_{j\in J'} \varphi_j^{-1}(\mathcal{B}_j),$$

da $\mathcal{W}'$ eine Basis ist und jede $W_j \in \mathcal{W}'$ Vereinigung von Elementen in $\mathcal{B}_i$ ist. □

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Resultat, das später nicht benutzt wird, aber das zeigt, dass schon die offenen Mengen V_i und die Übergangsabbildungen $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ die Menge M und die Karten bestimmen.

Satz 3.26. *Es sei $\{V_i\}_{i\in I}$ eine Familie von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Es sei weiter $\{\psi_{ij} : V_{ij} \to V_{ji}\}_{(i,j)\in I\times I}$ eine Familie von Abbildungen mit den folgenden Eigenschaften für alle $(i, j, k) \in I \times I \times I$.*

a. $V_{ij} \subset V_i$ *und* $V_{ji} \subset V_j$ *sind offen und* ψ_{ij} *ist ein Diffeomorphismus;*

b. $V_{ii} = V_i$ *und* $\psi_{ii} = \mathrm{id}_{V_i}$*;*

c. $\psi_{ji} = \psi_{ij}^{-1}$*;*

d. $\psi_{ij}(V_{ij} \cap V_{ik}) = V_{ji} \cap V_{jk}$ *und* $\psi_{jk} \circ \psi_{ij} = \psi_{ik}$*.*

Auf der disjunkten Vereinigung $\sqcup_{i\in I} V_i$ liefert

$$(q_i \in V_i) \sim (q_j \in V_j) \quad \Longleftrightarrow \quad q_i \in V_{ij},\ q_j \in V_{ji},\ \psi_{ij}(q_i) = q_j.$$

eine Äquivalenzrelation. Wir definieren dann

$$M = \Big(\bigsqcup_{i\in I} V_i\Big)/\sim, \qquad U_i := [V_i].$$

Dann sind die Abbildungen $V_i \to U_i,\ q \mapsto [q]$ bijektiv und die Inverse $\varphi_i : U_i \to V_i$ genügen den Eigenschaften

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) = V_{ij}, \quad \varphi_j(U_i \cap U_j) = V_{ji} \quad \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = \psi_{ij}.$$

Also erfüllt die Familie $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ auf M die Bedingungen 1,2,3 in Hilfsatz 3.24. $\square$

Aufgabe 3.27. Beweisen Sie den Satz 3.26. $\triangle$

Bemerkung 3.28. Vergleichen Sie den Satz 3.26 mit der Konstruktion von Vektorbündeln in **??**. $\triangle$

3.4 Glatte Abbildungen

Wir haben glatte Funktionen auf Mannigfaltigkeiten definiert. Die Definition von glatten Abbildungen $F : M \to N$ zwischen Mannigfaltigkeiten folgt einem ähnlichen Schema. Da N möglicherweise keine globale Karte besitzt, müssen wir aber auch verlangen, dass jeder Punkt in M eine Karte besitzt, deren Bildmenge in der Definitionsmenge einer Karte in N liegt.

Definition 3.29. Es seien $(M, \tilde{\mathcal{A}})$ und $(N, \tilde{\mathcal{B}})$ zwei glatte Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $F : M \to N$ heißt glatt, wenn Atlanten $\mathcal{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$ existieren, sodass, für alle $p \in M$ und alle Karten $(U_M, \varphi_M) \in \mathcal{A}$ um p und alle Karten $(U_N, \varphi_N) \in \mathcal{B}$ um $F(p)$ eine offene Umgebung $U'_M \subset U_M$ von p mit der folgenden Eigenschaft gibt:

$$F(U'_M) \subset U_N, \qquad \varphi_N \circ F \circ \varphi_M^{-1} : \varphi_M(U'_M) \to \varphi_N(U_N) \ \text{ glatt ist.} \tag{3.1}$$

$\triangle$

Hilfsatz 3.30. *Es sei $F : M \to N$ eine Abbildung mit der folgenden Eigenschaft: es gibt für alle $p \in M$ eine Karte $(W_M, \psi_M) \in \tilde{\mathcal{A}}$ um p und eine Karte $(W_N, \psi_N) \in \tilde{\mathcal{B}}$ um $F(p)$, für die*

$$F(W_M) \subset W_N, \qquad \psi_N \circ F \circ \psi_M^{-1} : \psi_M(W_M) \to \psi_N(W_N) \ \textit{ glatt ist.}$$

Dann ist F stetig und glatt. Andererseits erfüllt jede glatte Abbildung $F : M \to N$ die obige Eigenschaft. Daher sind glatte Abbildungen stetig und die Definition 3.29 *nicht von den Atlanten $\mathcal{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ abhängt.*

Beweis. Nach dem Hilfsatz reicht es zu zeigen, dass für alle $p \in M$ die Abbildung $F|_{W_M} : W_M \to W_N$ stetig ist, wobei (W_M, ψ_M) und (W_N, ψ_N) nach Voraussetzung die Eigenschaft haben, dass $\psi_N \circ F \circ \psi_M^{-1}$ stetig ist. Dann ist

$$F|_{W_M} = \psi_N^{-1} \circ (\varphi_N \circ F \circ \psi_M^{-1}) \circ \psi_M$$

als Verkettung von stetigen Abbildungen stetig.

Es seien nun Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben. Es seien weiter $(U_M, \varphi_M) \in \mathcal{A}$ und $(U_N, \varphi_N) \in \mathcal{B}$ beliebige Karten um p und $F(p)$. Da F stetig ist, ist $U'_M := F^{-1}(U_N) \cap W_M$ eine Umgebung von p mit $F(U'_M) \subset U_N$. Außerdem ist

$$\varphi_N \circ F \circ \varphi_M^{-1} = (\varphi_N \circ \psi_N^{-1}) \circ (\psi_N \circ F \circ \psi_M^{-1}) \circ (\psi_M \circ \varphi_M^{-1})$$

als Verkettung von glatten Abbildungen glatt. □

Aufgabe 3.31. Zeigen Sie, dass $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, genau dann, wenn f eine glatte Abbildung mit $N = \mathbb{R}$ ist. △

Wir geben nun einige Eigenschaften von glatten Abbildungen an.

Hilfsatz 3.32. *Es gilt:*

(i) Die Verkettung $G \circ F : M \to O$ von glatten Abbildungen $F : M \to N$, $G : N \to O$ ist glatt.

(ii) Wenn M eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ eine offene Menge ist, ist die Inklusion $\iota : U \to M$ glatt.

(iii) Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Es sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M und $F_i : U_i \to N$ glatte Abbildungen, sodass $F_i|_{U_i \cap U_j} = F_j|_{U_i \cap U_j}$. Dann gibt es eine einzige Abbildung $F : M \to N$ mit $F|_{U_i} = F_i$ für alle $i \in I$. Diese Abbildung ist glatt.

Beweis. Zu (i). Es sei $p \in M$. Aus der Definition 3.29 haben wir für alle Karten (U_M, φ_M) um p, (U_N, φ_N) um $F(p)$, (U_O, φ_O) um $G(F(p))$ offene Umgebungen $U'_M \subset U_M$ und $U'_N \subset U_N$ mit $F(U'_M) \subset U_N$ und $G(U'_N) \subset U_O$. Dann ist $U''_M := U'_M \cap G^{-1}(U'_N)$ eine Umgebung von p, sodass $G \circ F(U''_M) \subset U_O$. Außerdem

$$\varphi_O \circ (G \circ F) \circ \varphi_M^{-1}|_{\varphi_M(U''_M)} = \Big(\psi_O \circ G \circ \varphi_N^{-1}|_{\varphi_N(U'_N)}\Big) \circ \Big(\varphi_N \circ F \circ \varphi_M^{-1}|_{\varphi_M(U''_M)}\Big).$$

Die Abbildungen in Klammern sind glatt nach der Definition 3.29. Daher ist die Verkettung auch glatt.

Zu (ii). Es seien $(U_1 \cap U, \varphi_1|_{U_1 \cap U}) \in \mathcal{A}_U$ und $(U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}$ eine Karte um $p \in U$ und eine Karte um $\iota(p) = p \in M$. Wir nehmen $U' := U_1 \cap U \cap U_2$. Dann $\iota(U') = U' \subset U_2$ und

$$\varphi_2 \circ \iota \circ \varphi_1^{-1}|_{U'} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{U'}$$

ist glatt denn φ_1 und φ_2 gehören zu dem selben Atlas auf M.

Zu (iii). Die Abbildung $F : M \to N$ gegeben durch $F(p) = F_i(p)$, falls $p \in U_i$, ist nach Voraussetzung wohldefiniert. Es sei (U_M, φ_M) eine Karte um p und (U_N, φ_N) eine Karte um $F(p)$. Dann ist $p \in U_i$ für irgendwelche U_i in der Überdeckung und wir betrachten die Karte $(U_i \cap U_M, \varphi_M|_{U_i \cap U_M})$. Nach Voraussetzung gibt es $U'_M \subset U_i \cap U_M \subset U_M$, sodass $F_i(U'_M) \subset U_N$ und $\varphi_N \circ F_i \circ \varphi_M^{-1}|_{\varphi_M(U'_M)}$ ist glatt. Laut der Definition von F gilt

$$\varphi_N \circ F_i \circ \varphi_M^{-1}|_{\varphi_M(U'_M)} = \varphi_N \circ F \circ \varphi_M^{-1}|_{\varphi_M(U'_M)}$$

und wir sind fertig. □

Aufgabe 3.33. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir definieren die glatte Mannigfaltigkeit $\tilde{\mathbb{R}} := (\mathbb{R}, [\{(\mathbb{R}, \varphi)\}])$, wobei $\varphi(x) = x^3$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$ eine glatte Abbildung ist. Zeigen Sie außerdem, dass $f : \tilde{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung ist, genau dann, wenn $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, die durch 3 nicht teilbar sind. △

Definition 3.34. Eine Bijektion $F : M \to N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten heißt glatter Diffeomorphismus, wenn F und F^{-1} glatt sind. Wir schreiben $\mathrm{Diff}(M, N)$ für die Menge der Diffeomorphismen zwischen M und N und kürzen $\mathrm{Diff}(M) := \mathrm{Diff}(M, M)$. △

Aufgabe 3.35. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und (U, φ) eine Karte von M. Zeigen Sie, dass $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist, wobei wir auf V und U die Atlanten vom Beispiel 3.17 und 3.16 setzen. △

Aufgabe 3.36. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{T}^1 \to \mathbb{RP}^1, \qquad [x] \mapsto [\cos(\pi x) : \sin(\pi x)]$$

ein Diffeomorphismus ist. △

Aufgabe 3.37. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Diff}(M)$ eine Gruppe ist. △

Aufgabe 3.38. (a) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, welche als topologischer Raum zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass die Gruppe der Diffeomorphismen $\mathrm{Diff}(M)$ transitiv auf M wirkt. Das heißt, dass für alle p_0 und p_1 in M ein $F \in \mathrm{Diff}(M)$ mit $F(p_0) = p_1$ existiert. Hinweis: Beweisen Sie, dass die Bedingung

$$p \sim p' \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, F \in \mathrm{Diff}(M),\ F(p) = p'$$

eine Äquivalenzrelation definiert, deren Äquivalenzklassen offen sind. Zu zeigen, dass die Äquivalenzklasse offen sind, wählen Sie $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und $h(0) = 1$ und zeigen, dass für jedes genügend kleine $\epsilon > 0$ die Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, $(x, y) \mapsto (x + \epsilon\rho(x)\rho(|y|^2), y)$ ein Diffeomorphismus ist (benutzen Sie ohne Beweis, dass F glatt, bijektiv und $\mathrm{d}F$ invertierbar an jedem Punkt impliziert, dass F^{-1} glatt ist).

(b) Geben Sie ein Beispiel einer eindimensionalen glatten Mannigfaltigkeit M, auf der $\mathrm{Diff}(M)$ nicht transitiv wirkt. △

Definition 3.39. Eine glatte Abbildung $F : M \to N$ heißt lokaler Diffeomorphismus, wenn für alle $p \in M$ offene Umgebungen $U_p \subset M$ von p und $U_{F(p)} \subset N$ von $F(p)$ existieren, sodass $F|_{U_p} : U_p \to U_{F(p)}$ ein Diffeomorphismus ist. △

Aufgabe 3.40. Es seien $\tilde{\mathcal{A}}_1$ und $\tilde{\mathcal{A}}_2$ zwei glatte Strukturen auf M. Zeigen Sie, dass $\mathrm{id} : (M, \tilde{\mathcal{A}}_1) \to (M, \tilde{\mathcal{A}}_2)$ ein Diffeomorphismus ist, genau dann, wenn $\tilde{\mathcal{A}}_1 = \tilde{\mathcal{A}}_2$. △

Aufgabe 3.41. Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \{\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}])$ und $(\mathbb{R}, [\{\mathbb{R}, \varphi\}])$ diffeomorph sind. △

Definition 3.42. Wenn $F : M \to N$ eine glatte Abbildung ist, definieren wir den *Pull-Back* Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren

$$F^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M), \qquad F^*(f) = f \circ F. \qquad \triangle$$

Bemerkung 3.43. Es gilt $\mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{C^\infty(M)}$ und, wenn $F : M \to N$ und $G : N \to O$ glatt sind, $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$. △

Definition 3.44. Eine Lie-Gruppe G ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer Gruppenstruktur, die glatt ist. Das heißt, dass die Gruppenverknüpfung $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ und die Inverse $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ glatte Abbildungen sind. Ein Homomorphismus von Lie-Gruppen $F : H \to G$ ist eine glatte Abbildung, die zusätzlich ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir bezeichnen mit e die Einheit der Gruppe. △

Beispiel 3.45. Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$, der Torus $\mathbb{T}^n$ und der Menge der invertierbaren Matrizen $GL_n(\mathbb{R})$ sind Lie-Gruppen. Die Gruppe $\mathbb{Z}^n$ ist eine Lie-Gruppe der Dimension 0 mit der diskreten Topologie. △

Beispiel 3.46. Die folgenden sind Lie-Gruppen Homomorphismen: lineare Abbildungen zwischen euklidischen Räumen; die Projektion $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$; die Inklusion $\iota : GL_m(\mathbb{R}) \to GL_{m+n}(\mathbb{R})$, wobei $\iota(A) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ durch $\iota(A)(u, v) = (Au, v)$ für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ gegeben ist; die Abbildung $[A] : \mathbb{T}^m \to T^n$, $[A]([x]) = [A \cdot x]$, wobei A eine $m \times n$-Matrix mit ganzzahligen Koeffizienten ist. △

Wir haben gesehen, dass $\mathrm{Diff}(M)$ eine Gruppe ist. Wenn G eine Lie-Gruppe ist, können wir die Gruppenhomomorphismen $\Psi : G \mapsto \mathrm{Diff}(M)$ untersuchen. Die Menge $\mathrm{Diff}(M)$ ist keine endlich dimensionale Mannigfaltigkeit und daher ergibt kein Sinn zu sagen, ob Ψ glatt ist oder nicht. Trotzdem können wir die Abbildung

$$\tilde{\Psi} : G \times M \to M, \qquad \tilde{\Psi}(g, p) = \Psi(g)(p)$$

betrachten und verlangen, dass diese Abbildung glatt ist. Wir sind daher zur folgenden Definition gekommen.

Definition 3.47. Eine glatte linke Wirkung von einer Lie-Gruppe G auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist ein Gruppenhomomorphismus $\Psi : G \to \mathrm{Diff}(M)$, sodass die assoziierte Abbildung $\tilde{\Psi} : G \times M \to M$ glatt ist. Der Quotientenraum der Wirkung Ψ ist der Raum

$$M/\sim_\Psi, \qquad \text{wobei } p_1 \sim_\Psi p_2, \quad \Longleftrightarrow \quad \exists g \in G,\ p_2 = \Psi(g)(p_1)$$

versehen mit der Quotiententopologie.

Für alle $p \in M$ sei $\Psi_p : G \to M$, $\Psi_p(g :) = \tilde{\Psi}(g, p)$. Die Menge $\Psi_p(G) \subset M$ heißt Orbit von p und die Untergruppe $\mathrm{Stab}(p) := \Psi_p^{-1}(p)$ heißt Stabilisator von p. △

Bemerkung 3.48. Man kann eine glatte rechte Wirkung symmetrisch definierien als ein antihomomorphismus $\Psi : G \to \mathrm{Diff}(M)$. Das heißt: $\Psi(g_1 g_2) = \Psi(g_2)\Psi(g_1)$ für alle $g_1, g_2 \in G$. Wir verlangen dann, dass die Abbildung $\tilde{\Psi} : M \times G \to M$, $\tilde{\Psi}(p, g) = \Psi(g)(p)$ glatt ist. △

Bemerkung 3.49. Es sei $F : G \to G'$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen. Dann ist $\Psi_F : G \to \mathrm{Diff}(G')$, $\Psi_F(g)(g') = F(g)g'$ eine glatte linke Wirkung und $G'/\sim_{\Psi_F} = G'/F(G)$. Der Orbit von $e' \in G'$ ist $F(G)$ und der Stabilisator von p ist $\ker F$. △

Bemerkung 3.50. Der Quotientenraum $M/\sim_\Psi$ einer linken Wirkung ist im Allgemeinen keine Mannigfaltigkeit. △

Aufgabe 3.51. Zeigen Sie, dass $\tilde{\Psi}$ eigentlich eine Äquivalenzrelation auf M ist und dass die Abbildung $\pi : M \to M/\sim_\Psi$ offen ist. △

Aufgabe 3.52. Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen von glatten linken Wirkungen kommen:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Psi}_1 : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \tilde{\Psi}_1(k, p) = k + p,\\
&\tilde{\Psi}_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \tilde{\Psi}_2(k, (x, y)) = (x + k, (-1)^k y),\\
&\tilde{\Psi}_3 : (\mathbb{K} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) \to \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}, \qquad \tilde{\Psi}_3(\lambda, p) = \lambda p.
\end{aligned}$$

Was sind die Quotientenräumen dieser Wirkungen? △

Aufgabe 3.53. Es sei G eine Lie-Gruppe, M eine Mannigfaltigkeit und $F : G \times M \to M$ eine glatte Abbildung, sodass $F(e, p) = p$ und $F(g_1 g_2, p) = F(g_1, F(g_2, p))$ für alle $g_1, g_2 \in G$ und $p \in M$. Zeigen Sie, dass F von einer glatten linken Wirkung kommt. Geben Sie eine ähnliche Bedingung für eine glatte Abbildung, von einer glatten rechten Wirkung zu kommen. △

3.5 Glatte Funktionen

Auf einer offenen Menge V des $\mathbb{R}^n$ haben wir viele glatte Funktionen. Man kann zum Beispiel Polynome, oder allgemeiner analytische Funktionen wie das Exponential nehmen. Auf einer allgemeinen glatten Mannigfaltigkeit M ist es aber soweit nicht klar, dass weitere glatte Funktionen außer der Konstanten existieren.

Auf der Definitionsmenge U einer lokalen Karte (U, φ) können wir die glatten Funktionen von $\mathbb{R}^n$ durch die Abbildung φ übertragen. Somit haben wir viele lokale glatte Funktionen auf M. Die Frage ist nun, ob diese Funktionen auf die ganze M fortgesetzt werden können. Wir brauchen dazu eine Definition.

Definition 3.54. Es sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einer topologischen Mannigfaltigkeit. Der Träger von f ist die abgeschlossene Menge

$$T(f) := \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}. \qquad \triangle$$

Hilfsatz 3.55. *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ eine offene Menge. Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Träger $T(f)$, der nach Definition eine abgeschlossene Menge von U ist. Wenn zusätzlich $T(f)$ eine abgeschlossene Menge von M ist, ist die Funktion $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$\tilde{f}(p) = \begin{cases} f(p) & \textit{falls } p \in U \\ 0 & \textit{falls } p \notin T(f). \end{cases}$$

glatt und $T(f) = T(\tilde{f})$. Da M hausdorffsch ist, ist die Voraussetzung über $T(f)$ in dem besonderen wichtigen Fall erfüllt, wenn $T(f)$ kompakt ist.

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Menge $M \setminus T(f)$ offen. Auf $U \cap (M \setminus T(f))$ ist $f \equiv 0$. Nach Hilfatz 3.32.(iv) ist $\tilde{f}$ glatt. Da $S := \{p \in U | f(p) \neq 0\} = \{p \in M \mid \tilde{f}(p) \neq 0\}$ gilt, müssen wir zeigen, dass der Abschluss von S in U und in M gleich sind, um $T(f) = T(\tilde{f})$ zu beweisen. Das folgt aus Folgerung 2.49, da $T(f)$ abgeschlossen in M ist. $\square$

Folgerung 3.56. *Es seien $f : M \to \mathbb{R}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen, wobei U offen in M ist. Wenn $T(f)$ in U enthalten ist, ist der Träger $T(fg)$ des Produktes $fg : U \to \mathbb{R}$ abgeschlossen in M. Daher lässt sich fg zu einer glatten Funktion $\widetilde{fg} : M \to \mathbb{R}$, wie im Hilfsatz* 3.55*, fortsetzen.*

Beweis. Wir haben $T(fg) \subset T(f|_U) = T(f)$. Da $T(f)$ abgeschlossen in M ist, bekommen wir aus der Folgerung 2.49, dass der Abschluss von $S = \{p \in U \mid (fg)(p) \neq 0\}$ in U und in M übereinstimmen. Deshalb ist $T(fg)$ abgeschlossen in M und wir können Hilfsatz 3.55 anwenden. $\square$

Diese Hilfsätze wären nicht so nutzlich, wenn wir keine Funktionen mit kompaktem Träger hätten. Der nächste Schritt ist dann, solche Funktionen zu konstruieren. Wir fangen an, die klassische glatte Funktion

$$e_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad e_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq 0 \\ e^{-1/t} & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

zu definieren.

Aufgabe 3.57. Beweisen Sie, dass e_1 glatt ist. Hinweis: für $t > 0$ beweisen Sie die Formel

$$\frac{\mathrm{d}^k e_1}{\mathrm{d}t^k} = \frac{Q_k(t)}{t^{2k}} e_1(t),$$

induktiv, wobei Q_k ein Polynom ist. △

Es sei $e_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $e_2(t) := e_1(t)e_1(1-t)$, sodass $e_2(1-t) = e_2(t)$. Wir definieren die Funktion $e_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$e_3(t) := \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{t} e_2(s) \mathrm{d}s, \qquad c := \int_{-\infty}^{+\infty} e_2(s) \mathrm{d}s.$$

Die Funktion e_3 ist glatt und hat die Eigenschaft, dass

$$\begin{cases} e_3(t) = 0 & \text{für } t \leq 0, \\ e_3(t) \in (0,1) & \text{für } t \in (0,1), \\ e_3(t) = 1 & \text{für } t \geq 1, \end{cases} \tag{3.2}$$

Außerdem gilt

$$e_3(1-t) = 1 - e_3(t) \tag{3.3}$$

Aufgabe 3.58. Zeichnen Sie eine Skizze der Funktionen e_1, e_2 und e_3. △

Im nächsten Resultat benutzen wir die euklidische Norm, um Funktionen mit kompaktem Träger in jeder Dimension zu definieren. Der Beweis ist eine Aufgabe für Sie.

Hilfsatz 3.59. *Es seien $0 < a < b$ reelle Zahlen und $q \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Funktion*

$$\rho_{a,b,q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \rho_{a,b,q}(x) = 1 - e_3\Big(\frac{|x-q| - a}{b-a}\Big)$$

glatt und hat die Eigenschaft

$$\begin{cases} \rho_{a,b,q}(x) = 1 & \text{für } x \in \overline{B_a(q)}; \\ \rho_{a,b,q}(x) \in (0,1) & \text{für } x \in B_b(q) \setminus \overline{B_a(q)}; \\ \rho_{a,b,q}(x) = 0 & \text{für } x \notin B_b(q). \end{cases}$$

□

Hilfsatz 3.60. *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Menge und $K \subset U$ eine kompakte Menge. Für alle glatten $f : U \to \mathbb{R}$ existiert eine glatte Funktion $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft:*

$$T(\tilde{f}) \text{ kompakte Teilmenge von } U, \qquad \tilde{f}|_K = f|_K. \tag{3.4}$$

Beweis. Es genügt, eine Funktion $\tilde{1} : M \to \mathbb{R}$ zu finden, die die konstante Funktion $1 : U \to \mathbb{R}$ fortsetzt und (3.4) erfüllt. Wenn $f : U \to \mathbb{R}$ eine beliebige glatte Funktion ist, dann ist $\tilde{f} := f \cdot \tilde{1}$ die gewünschte Funktion nach Hilfsatz 3.55, da $T(\tilde{f}) \subset T(\tilde{1})$.

Für jedes $p \in K$ sei (U_p, φ_p) eine Karte um p. Es gibt dann einen Ball $\overline{B_{2a_p}(\varphi_p(p))} \subset \varphi_p(U_p \cap U) \subset \mathbb{R}^n$. Wir nehmen dann die offene Überdeckung $\{\varphi_p^{-1}(B_{a_p}(\varphi_p(p)))\}_{p \in K}$ von K. Da K kompakt ist können wir schon endlich viele Punkte $p_1, \dots, p_m$ finden, sodass K von den offenen Mengen $\varphi_i^{-1}(B_{a_i}(q_i))$ überdeckt ist, wobei wir $\varphi_i := \varphi_{p_i}$, $q_i := \varphi_i(p_i)$ und $a_i := a_{p_i}$ gesetzt haben. Die Funktionen $\rho_{a_i, 2a_i, q_i} \circ \varphi_i : U_i \to \mathbb{R}$ sind glatt und mit kompaktem Träger. Nach Hilfsatz 3.55 können wir diese als glatte Funktionen auf der ganzen M sehen. Wir definieren dann

$$g : M \to [0, \infty), \qquad g = \sum_{i=1}^{m} \rho_{a_i, 2a_i, q_i} \circ \varphi_i.$$

Wir bemerken, dass $g \geq 1$ auf $\cup_{i=1}^m \varphi_i^{-1}(B_{a_i}(q_i))$ und dass

$$T(g) = \overline{\bigcup_{i=1}^{m} \varphi_i^{-1}(B_{2a_i}(q_i))}$$

kompakt ist. Wir setzen $\tilde{1} : M \to \mathbb{R}$, $\tilde{1} = e_3 \circ g$, wobei e_3 die Eigenschaft in (3.2) besitzt. Insbesondere ist $\tilde{1} = 1$ auf U' und $T(\tilde{1}) = T(g)$. □

3.6 Zerlegungen der Eins

Der Hilfsatz 3.60 zeigt insbesondere dass, wenn $K \subset U \subset M$ mit K kompakt und U offen gilt, dann können wir für jede $f : U \to \mathbb{R}$ eine $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}|_K = f_K$ und $T(\tilde{f}) \subset U$ finden. Also gibt $\tilde{f}$ uns die Funktion f auf K wieder und ihr Träger ist dazu in U enthalten. Nun wollen wir nicht nur eine offene Menge U sondern eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von M betrachten. Unser Ziel wird es sein, Funktionen $\tilde{f}_i : M \to \mathbb{R}$ zu finden, sodass

$$T(\tilde{f}_i) \subset U_i, \qquad f = \sum_{i \in I} \tilde{f}_i.$$

Die Summe auf der rechten Seite läuft auf einer möglicherweise unendlich Indexmenge I. Um zu haben, dass die Summe wohldefiniert ist, müssen wir dazu verlangen, dass die Träger $\{T(\tilde{f}_i)\}_{i \in I}$ eine lokal endliche Familie sind (Erinnerung aus Definition 2.4: das heißt für alle $p \in M$ gibt es eine Umgebung U von p, sodass $U \cap T(\tilde{f}_i) \neq \varnothing$ nur für endlich viele Indizes i).

Wie im Beweis des Hilfsatzes 3.60 reicht es, diese Funktionen für die Konstante $f = 1$ zu finden. Wir haben also die folgende Definition begründet.

Definition 3.61. Eine Zerlegung der Eins ist eine Familie $\mathcal{R} = \{\rho_i : M \to \mathbb{R}\}_{i \in I}$ von glatten Funktionen, sodass

1. die Familie der Träger $\{T(\rho_i)\}_{i\in I}$ eine lokal endliche Überdeckung von M ist;

2. es gilt $0 \leq \rho_i \leq 1$ für alle $i \in I$ und $1 = \sum_{i\in I} \rho_i$.

Es sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M mit selber Indexmenge wie $\mathcal{R}$. Wir sagen, dass $\mathcal{R}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich $\mathcal{U}$ ist, wenn $T(\rho_i) \subset U_i$ für alle $i \in I$. $\triangle$

Bemerkung 3.62. Aus Eigenschaft 2 folgt es schon, dass die Träger die ganze M überdecken. $\triangle$

Beispiel 3.63. Es sei $M := (0, +\infty)$ und $\mathcal{U} = \{(k, k+2)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Dann ist

$$\mathcal{R} = \{\rho_{1/4,3/4,k+1}\}_{k\in\mathbb{N}_+} \cup \{\rho_{5/4,7/4,0}\}$$

eine Zerlegung der Eins bezüglich $\mathcal{U}$. Bitte beweisen Sie diese Aussage, indem Sie die Eigenschaften von e_3, insbesondere (3.3), benutzen. $\triangle$

Bemerkung 3.64. Wie das obige Beispiel darlegt, sind die Träger $T(\rho_i)$ nicht unbedingt kompakt. Nach Hilfsatz 2.16 sind die Träger $T(\rho_i)$ nicht leer nur für abzählbar viele $i \in I$. $\triangle$

Um zu zeigen, dass bezüglich jeder offenen Überdeckung von M eine Zerlegung des Eins existiert, benutzen wir den folgenden topologischen Satz.

Satz 3.65. *Es sei M ein hausdorffscher topologischer Raum mit präkompakter, abzählbarer Basis $\mathcal{B}$ (Erinnerung: präkompakt heißt, dass die Elemente in $\mathcal{B}$ kompakt Abschluss besitzen). Für alle offene Überdeckungen $\mathcal{U}$ von M existiert eine Teilüberdeckung $\mathcal{B}'$ von $\mathcal{B}$, sodass $\bar{\mathcal{B}}' := \{\bar{B} \mid B \in \mathcal{B}'\}$ eine lokal endliche Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist (Erinnerung: Verfeinerung heißt, dass für alle $\bar{B} \in \bar{\mathcal{B}}'$ eine $U \in\subset \mathcal{U}$ mit $\bar{B} \subset U$ existiert).* $\square$

Aufgabe 3.66. Lesen Sie den Beweis dieses Satzes in Walcher, Theorem 1.3. Sie gewinnen einen Riegel Schokolade, wenn Sie mir sagen, wo in dem Beweis benutzt wird, dass M hausdorffsch ist. $\triangle$

Satz 3.67. *Für alle offenen Überdeckungen $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ einer glatten Mannigfaltigkeit existieren Zerlegungen der Eins $\mathcal{R}^0_{\mathcal{U}} = \{\rho^0_j\}_{j\in J'}$ und $\mathcal{R}^1_{\mathcal{U}} = \{\rho^1_i\}_{i\in I}$ auf M mit der Eigenschaft:*

- *für alle $j \in J'$ ist $T(\rho^0_i)$ kompakt und es gibt $i(j) \in I$ mit $T(\rho^0_j) \subset U_i$;*
- *$\mathcal{R}^1_{\mathcal{U}}$ ist eine Zerlegung der Eins bezüglich $\mathcal{U}$.*

Beweis. Wir wenden Satz 3.65 mit der Basis $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j\in J}$ von Hilfsatz 3.25 an und wir bekommen eine Teilüberdeckung $\mathcal{B}' = \{B_j := \varphi_j^{-1}(B_{2a_j}(q_j))\}_{j\in J'}$ von $\mathcal{B}$, sodass $\bar{\mathcal{B}}' = \{\bar{B}_j\}_{j\in J'}$ eine lokal endliche Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist. Wir definieren

$$\rho_j : M \to \mathbb{R}, \qquad \rho_j = \rho_{a_j,2a_j,q_j} \circ \varphi_j : M \to \mathbb{R}$$

Nach Satz 3.55 haben wir $T(\rho_j) = \bar{B}_j$. Wir setzen

$$\sigma : M \to \mathbb{R}, \qquad \sigma = \sum_{j \in J'} \rho_j.$$

Es gibt um jeden Punkt $p \in M$ eine Karte (U_p, φ_p) und eine Teilmenge $J'_p \subset J'$, sodass J'_p endlich und $\rho_j|_{U_p} = 0$ für alle $j \notin J'_p$ ist. Dann

$$\sigma|_{U_p} = \sum_{j \in J'_p} \rho_j$$

ist glatt denn sie ist eine endliche Summe von glatten Funktionen. Nach Hilfsatz 3.32 ist die Funktion σ glatt.

Wir zeigen nun, dass für alle $p \in M$ die Zahl $\sigma(p)$ positiv ist. Da alle die ρ_j nicht negativ sind, reicht es zu zeigen, dass es ρ_{j_p} mit $\rho_{j_p}(p) > 0$ existiert. Das ist klar denn p gehört zu irgendwelcher Menge $\varphi_{j_p}^{-1}(B_{2a_{j_p}}(q_{j_p}))$, da $\mathcal{B}'$ eine Überdeckung von M ist, und $\rho_{a_{j_p}, 2a_{j_p}, q_{j_p}}$ positive Werte auf $B_{2a_{j_p}}(q_{j_p})$ annimmt. Wir setzen dann für alle $j \in J'$:

$$\rho_j^0 : M \to \mathbb{R}, \qquad \rho_j^0 := \frac{\rho_j}{\sigma}.$$

Die Familie $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^0 := \{\rho_j^0\}_{j \in J'}$ ist eine Zerlegung der Eins, da $\bar{\mathcal{B}}' = \{T(\rho_j) = T(\rho'_j)\}_{j \in J'}$ lokal endlich ist und

$$\sum_{j \in I'} \rho_j = \sum_{j \in J'} \frac{\rho_j}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \sum_{j \in I'} \rho_j = \frac{\sigma}{\sigma} = 1.$$

Wir möchten nun die Familie $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^0$ anpassen, sodass wir eine Zerlegung der Eins $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^1$ bezüglich $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ gewinnen. Da $\bar{\mathcal{B}}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist, gibt es für jedes $j \in J'$ ein $i(j) \in I$, sodass $\bar{B}_j \subset U_{i(j)}$. Da die Familie der Träger der Funktionen in $\mathcal{R}$ lokal endlich ist, können wir

$$\rho_i^1 : M \to \mathbb{R}, \qquad \rho_i^1 = \sum_{\substack{j \in J' \\ i = i(j)}} \rho_j^0$$

setzen. Wir behaupten, dass $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^0 := \{\rho_i^1\}_{i \in I}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich $\mathcal{U}$ ist. Erstens gilt nach Konstruktion

$$\sum_{i \in I} \rho_i^1 = \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in J' \\ i = i(j)}} \rho_j^0 = \sum_{j \in J'} \rho_j^0 = 1.$$

Zweitens zeigen wir, dass

$$T(\rho_i^1) = \bigcup_{\substack{j \in I' \\ i = i(j)}} T(\rho_j^0) \tag{3.5}$$

Nach der Definition von ρ_i^0 haben wir

$$\{p \in M \mid \rho_i^1(p) \neq 0\} = \bigcup_{\substack{j \in J' \\ i = i(j)}} \{p \in M \mid \rho_j^0(p) \neq 0\}.$$

Daher (3.5) folgt aus Hilfsatz 2.7. Da $T(\rho_j^0) \subset U_{i(j)}$, schließen wir daraus, dass $T(\rho_i^0) \subset U_i$. Drittens behaupten wir, dass $\{T(\rho_i^1)\}_{i\in I}$ eine lokal endliche Familie ist. Wie wir schon oben bemerkt haben, gibt es für alle $p \in M$ eine Umgebung U_p von p und eine endliche Menge $J'_p \subset J'$ mit $T(\rho_j^0) \cap U_p = \varnothing$ für alle $j \notin J'_p$. Wir definieren die endliche Teilmenge $I_p = \{i(j) \mid j \in J'_p\}$ von I. Wenn $i \notin I_p$, dann

$$\rho_i^1|_{U_p} = \bigcup_{\substack{j\in J'\setminus J'_p \\ i=i(j)}} \rho_j^0|_{U_p} = 0. \qquad \square$$

Folgerung 3.68. *Es sei $U \subset M$ eine offene Menge einer glatten Mannigfaltigkeit und $f : U \to \mathbb{R}$ glatt. Dann:*

1. *für alle $C \subset M$ abgeschlossen mit $C \subset U$ existiert $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ mit*

$$T(\tilde{f}) \subset U, \qquad f|_C = \tilde{f}_C;$$

2. *es gibt eine Familie von glatten Funktionen $\{f_i : M \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$, sodass $\{T(f_i)\}_{i\in I}$ eine lokal endliche Familie von kompakten Mengen ist und*

$$f = \sum_{i\in I} f_i.$$

Beweis. Nach dem Satz 3.67 gibts es eine Zerlegung der Eins $\mathcal{R}^1_{\mathcal{U}} = \{\rho_U, \rho_{M\setminus C}\}$ bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U} = \{U, M \setminus C\}$. Dann für alle $p \in C$ gilt $\rho_{M\setminus C}(p) = 0$. Deshalb hat $f\rho_U : U \to \mathbb{R}$ die Eigenschaft $f(p)\rho_U(p) = f(p)(\rho_U(p) + \rho_{M\setminus C}(p)) = f(p)$. Außerdem $T(f\rho_U) \subset T(\rho_U)$ und deswegen ist $T(f\rho_U)$ abgeschlossen in M nach Folgerung 2.49 und fortsetzbar nach Hilfsatz 3.55. Das zeigt den ersten Punkt. Für den zweiten Punkt, betrachten wir die Überdeckung $\mathcal{U} = \{U\}$. Dann ist $\mathcal{R}^0_{\mathcal{U}} = \{\rho_i^0\}_{i\in I}$ eine Zerlegung der Eins auf U mit kompakten Träger. Daher ist $T(\rho_i^0)$ abgeschlossen in M und $f\rho_i^0 : U \to \mathbb{R}$ auf M nach Folgerung 2.49 und Hilfsatz 3.55 zu einer $f_i : M \to \mathbb{R}$ fortsetzbar. Die Familie $\{f_i\}_{i\in I}$ besitzt die gewünschte Eigenschaft. $\square$

3.7 Existenz und Klassifizierung von glatten Strukturen

Glatte Mannigfaltigkeiten sind topologische Mannigfaltigkeiten zusammen mit einer glatten Struktur. Wir können dann die natürlichen Fragen stellen: Besitzt jede topologische Mannigfaltigkeit eine glatte Struktur? Wenn ja, ist sie eindeutig bis auf Diffeomorphismus? Die Antworten auf diese Fragen sind extrem spannend und tief. Wenn $\dim M \leq 3$ (Radó für $\dim M \leq 2$ und Moise für $\dim M = 3$), dann lässt jede topologische Mannigfaltigkeit eine einzige glatte Struktur bis auf Diffeomorphismus zu. Für alle $n \geq 4$ gibt es aber (kompakte) topologische Mannigfaltigkeiten, die keine glatte Struktur zulassen.

Die Frage der Eindeutigkeit der glatten Struktur ist auch faszinierend. In allen Dimensionen $n \geq 4$ gibt es topologische Mannigfaltigkeiten mit mehreren glatten Strukturen. Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ besitzt eine einzige glatte Struktur für $n > 4$ aber unabzählbar viele, wenn $n = 4$. Zum Beispiel gibt es offene Mengen $V \subset \mathbb{R}^4$, für die ein Homöomorphismus $F : \mathbb{R}^4 \to V$ existiert aber kein Diffeomorphismus. Daher liefert $[\{(\mathbb{R}^4, F)\}]$ eine glatte Struktur auf $\mathbb{R}^4$, die nicht diffeomorph zu der Standardstruktur ist.

Andererseits kompakte Mannigfaltigkeit lassen immer nur eine endliche Anzahl von glatten Strukturen zu. Zum Beispiel besitzt der Torus $\mathbb{T}^5$ 3 glatte Strukturen und die Sphäre S^7 (mit einer festen Orientierung) 28 glatte Strukturen. Viele Fragen bleiben aber offen. Es ist nicht bekannt, ob S^4 mehr als eine glatte Struktur zulässt.

Wir haben schon vorher bemerkt, dass wir mit C^∞-Abbildungen statt C^k mit $k \geq 1$ arbeiten, da diese Abbildungen abgeschlossen durch Differenzierung sind. Man könnte aber trotzdem C^k-Atlanten (d.h. die Übergangsabbildungen sind der Klasse C^k) auf topologischen Mannigfaltigkeiten definieren. Ist es möglich, dass eine C^k-Mannigfaltigkeit existiert, die nicht glatt ist? Oder gibt es vielleicht zwei glatte Strukturen, die die selbe C^k-Struktur geben? Die Antwort zu diesen Fragen ist „nein": Jede C^1-Struktur kommt aus einer eindeutigen C^∞-Struktur.

Auf der anderen Seite kann man spezielle Familien von glatten Mannigfaltigkeiten studieren. Zwei Beispiele davon sind sehr wichtig: affine und komplexe Mannigfaltigkeiten. Affine Mannifgaltigkeiten sind topologische Mannigfaltigkeiten, die einen glatten Atlas besitzen, sodass die Übergangsabbildungen (invertierbare) affine Transformationen sind:

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x) = A \cdot x + x_0.$$

Hier hängen A und x_0 von i und j aber nicht von $x \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$ ab. Komplexe Mannigfaltigkeiten sind gerade dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten, die einen glatten Atlas besitzen, sodass die Übergangsabbildungen $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ sind (invertierbare) holomorphe Abbildungen, wobei wir $\varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$ mit offenen Teilmengen von $\mathbb{C}^{n/2}$ durch den Isomorphismus

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{n/2}, \qquad (x_1, y_1, \ldots, x_{n/2}, y_{n/2}) \mapsto (z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_{n/2} = x_{n/2} + iy_{n/2})$$

identifizieren. Trotz der Ähnlichkeit der Definitionen unterscheidet sich die Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten in vielen Hinsichten stark von der Theorie der glatten Mannigfaltigkeit. Einer der Gründe dafür ist dass, wenn $f : M \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ist, dann:

1. falls M kompakt ist, dann ist f konstant;
2. falls M nicht kompakt ist aber f einen kompakten Träger besitzt, dann ist f null.

Das zeigt, dass wenn M eine kompakte und zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit ist, dann alle holomorphe Abbildungen von $F : M \to \mathbb{C}^m$ mit $m \in \mathbb{N}$ konstant sind (betrachten Sie die Verkettung mit den komplexen Koordinaten $z^i : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$). Sie können diese Aussage mit der Existenz von Einbettungen von glatten Mannigfaltigkeiten in euklidische Räume (siehe Abschnitt 5.5) vergleichen. Für kompakte complexe Mannigfaltigkeit wurde dagegen die Existenz von Einbettungen in den komplex projektiven Raum untersucht (Kodaira Einbettungssatz).

4 Der Tangentialraum und das Differential

Wir wollen nun den Tangentialraum an einem Punkt p einer glatten Mannigfaltigkeit M definieren. Der wird ein Vektorraum T_pM sein, dessen Elemente Tangentialvektore genannt werden. Dazu werden wir auch das Differential $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ einer glatten Abbildung $F : M \to N$ einführen, als die lineare Wirkung von F auf Tangentialvektoren.

Wir werden drei äquivalente Definitionen geben. Die erste ist geometrischer aber spielt in wesentlichen Beispielen und in der Theorie keine große Rolle. Die zweite wird oft von Physikern benutzt. Sie ist sehr nutzlich in den Berechnungen mit Koordinaten aber ist manchmal umständlich für theoretische Überlegungen. Die dritte ist algebraisch und verbunden mit der Leibnizregel für die Ableitung eines Produkts. Sie spielt in der Theorie eine zentrale Rolle aber sie benutzt essenziell, dass wir mit glatten Funktionen und nicht nur mit Funktionen der Klasse C^k mit $k \geq 1$ arbeiten (siehe Hilfsatz 4.21).

4.1 Das motivierende Beispiel von Teilmengen in $\mathbb{R}^\ell$

Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^\ell$ und $p \in M$. Dann sollte der Raum der Tangentialvektoren an p der Untervektorraum $T_pM^{(1)} \subset \mathbb{R}^\ell$ sein, sodass $T_pM^{(1)} + p$ am besten M in einer Umgebung von p annähert. Zum Beispiel, wenn $M = \gamma(\mathbb{R})$, wobei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\ell$, γ Homöomorphismus auf das Bild und

$$\dot{\gamma} := \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

nie null ist, sollte nach (1.1) die Gleichung $T_{\gamma(t)}M^{(1)} = \mathbb{R} \cdot \dot{\gamma}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sein. Also wenn M höherdimensionale ist, zum Beispiel $M = S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ und p der Nordpol ist, können wir den Tangentialraum definieren als

$$T_pM^{(1)} := \Big\{ \dot{\gamma}(0) \;\Big|\; \gamma : I_\gamma \to M,\ \gamma(0) = p,\ \iota \circ \gamma \text{ glatt} \Big\},$$

wobei $\iota : M \to \mathbb{R}^\ell$ die Inklusion und I_γ irgendwelches offene Intervall in $\mathbb{R}$ mit $0 \in I$ sind. Also sind die Tangentialvektore von M an p die Ableitungen der glatten Kurven in M, die durch p laufen. Diese Definition stimmt mit dem Fall $M = \gamma(\mathbb{R})$, da, wenn $a, b \in \mathbb{R}$, dann für die reparametrisierte Kurve $\gamma_{a,b}(t) := \gamma(at + b)$ die Bedingung

$$\dot{\gamma}_{a,b}(0) = a\dot{\gamma}(b)$$

gilt. Es sei nun $F : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^{\ell'}$ eine glatte Abbildung, sodass $\mathrm{d}_pF : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^{\ell'}$ durch (1.1) definiert ist. Wenn N eine Teilmenge des $\mathbb{R}^{\ell'}$ mit $F(M) \subset N$ ist, setzen wir

$$\mathrm{d}_pF^{(1)} : T_pM \to T_{F(p)}N, \qquad \mathrm{d}_pF^{(1)} := \mathrm{d}_pF|_{T_pM^{(1)}}.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert: Wenn $v \in T_pM^{(1)}$, existiert $\gamma : I_\gamma \to M$ glatt mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = v$, sodass die Kurve $F \circ \gamma : I_\gamma \to N$, siehe das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] & N. \\ I_\gamma \arrow[u, "\gamma"] \arrow[ur, dashed, "F\circ\gamma"'] & \end{tikzcd},$$

auch glatt ist und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ \gamma)(0) = \mathrm{d}_{\gamma(0)}F \cdot \dot\gamma(0) = \mathrm{d}_pF \cdot v.$$

Was sagen uns diese Definitionen, wenn M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ ist? In diesem Fall haben wir einfach $T_pM^{(1)} = \mathbb{R}^m$, und daher $\mathrm{d}_pF^{(1)} = \mathrm{d}_pF$, da für alle $v \in \mathbb{R}^m$ wir eine glatte Kurve

$$\gamma_{p,v} : I_{\gamma_{p,v}} \to U, \quad \text{mit } \gamma_{p,v}(0) = p,\ \dot\gamma_{p,v}(0) = v$$

haben. Zum Beispiel kann man $\gamma_{p,v}(t) := p + tv$ setzen, wobei $I_{\gamma_{p,v}}$ so klein gewählt werden muss, dass $p + tv \in M$ für alle $t \in I$.

Nach der Definition können wir $T_pM^{(1)}$ mit einem Quotientenraum von Kurven identifizieren und zwar mit

$$T_pM^{(2)} := \Big\{\gamma : I_\gamma \to M \ \Big|\ \gamma(0) = p,\ \iota \circ \gamma \text{ glatt}\Big\}/\sim, \quad \gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot\gamma_1(0) = \dot\gamma_2(0).$$

Wir haben die Bijektion

$$\alpha : T_pM^{(2)} \to T_pM^{(1)}, \qquad \alpha([\gamma]) = \dot\gamma(0).$$

Das Differential wird dann zu

$$\mathrm{d}_pF^{(2)} : T_pM^{(2)} \to T_{F(p)}N^{(2)}, \qquad \mathrm{d}_pF^{(2)} \cdot [\gamma] = [F \circ \gamma].$$

Die Objekte $T_pM^{(2)}$ und $\mathrm{d}_pF^{(2)}$ lassen sich besser als die entsprechenden Objekte $T_pM^{(1)}$ und $\mathrm{d}_pF^{(1)}$ auf abstrakte glatte Mannigfaltigkeit übertragen. Der Grund dafür ist, dass wir haben noch nicht eine Bedeutung zu $\dot\gamma$ für eine Kurve in einer abstrakt Mannigfaltigkeit gegeben aber können wir die Äquivalenzrelation $\sim$ mit Hilfe der Karten definieren. Das werden wir im nächsten Abschnitt machen.

4.2 Die geometrische Definition

Wir definieren nun den Tangentialraum für abstrakte (also nicht mehr als Teilmengen des euklidischen Raums betrachtet) glatte Mannigfaltigkeiten M.

Definition 4.1. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Wir definieren den Tangentialraum von M an p

$$T_pM := \Big\{\gamma : I_\gamma \to M \text{ glatt} \ \Big|\ \gamma(0) = p\Big\}/\sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\,(U,\varphi) \text{ Karte um } p, \quad \frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma_1)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma_2)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}$$

gegeben wird. Wenn $F : M \to N$ eine glatte Abbildung ist, definieren wir das Differential von F an p

$$\mathrm{d}_pF : T_pM \to T_{F(p)}N, \qquad \mathrm{d}_pF \cdot [\gamma] = [F \circ \gamma]. \qquad \triangle$$

Bemerkung 4.2. Die folgenden Eigenschaften stammen unmittelbar aus der Definition des Differentials:

- für alle $p \in M$ gilt: $\mathrm{d}_p\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{T_pM}$;
- für alle $F : M \to N$ und $G : N \to O$ gilt: $\forall\, p \in M,\ \mathrm{d}_p(G \circ F) = \mathrm{d}_{F(p)}G \cdot \mathrm{d}_pF$. $\triangle$

Wir haben die folgende gleichbedeutende Definition der Äquivalenzrelation, die den Tangentialraum definiert.

Hilfsatz 4.3. *Es seien $\gamma_1 : I_{\gamma_1} \to M$ und $\gamma_2 : I_{\gamma_2} \to M$ zwei glatte Kurven mit $\gamma_1(0) = p = \gamma_2(0)$. Dann*

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\,(U,\varphi) \text{ Karte um } p, \quad \frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma_1)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma_2)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}.$$

Beweis. Wir zeigen, dass die rechte Seite die linke impliziert. Wir wissen, dass

$$\frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma_1)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma_2)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}$$

und wir nehmen eine beliebige Karte (W,ψ) um p. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(\psi \circ \gamma_1)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_1)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} &= \mathrm{d}_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})^{(1)} \frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma_1)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \\ &= \mathrm{d}_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})^{(1)} \frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma_2)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_2)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}(\psi \circ \gamma_2)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}. \end{aligned} \qquad \square$$

Wir wollen nun zeigen, dass T_pM in Bijektion zu $\mathbb{R}^m$ mit $m = \dim M$ steht. Dazu nehmen wir eine Karte (U,φ) um p mit $q := \varphi(p)$ und setzen

$$\alpha_{\varphi,p} : T_pM \to \mathbb{R}^m, \quad [\gamma] \mapsto \frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}. \tag{4.1}$$

Dann ist $\alpha_{\varphi,p}$ bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\alpha_{\varphi,p}^{-1} : \mathbb{R}^m \to T_pM, \qquad v \mapsto [\varphi^{-1} \circ \gamma_{q,v}], \tag{4.2}$$

wobei $\gamma_{q,v} : I \to V$ eine beliebige Kurve mit $\gamma_{q,v}(0) = q$ und $\dot\gamma_{q,v}(0) = v$. Nach Hilfsatz 4.3 ist die Abbildung in (4.2) wohldefiniert und unmittelbar, dass die Abbildungen in (4.1) und (4.2) Inverse voneinander sind.

Definition 4.4. Es sei (U, φ) eine Karte um p mit $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$. Dann setzen wir

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p := \alpha_{\varphi,p}^{-1}(e_i), \qquad \forall\, i = 1, \dots, m,$$

wobei $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ die i-te Koordinatenvektor in $\mathbb{R}^m$ darstellt. $\triangle$

Wir können mithilfe der Abbildungen $\alpha_{\varphi,p}$ dem Tangentialraum die Struktur eines reellen Vektorraums der Dimension m geben.

Satz 4.5. *Es sei p ein Punkt auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Für alle Karten $\varphi_1 = (x^1, \dots, x^m)$ und $\varphi_2 = (y^1, \dots, y^m)$ um p gilt*

$$\alpha_{\varphi_2,p} \circ \alpha_{\varphi_1,p}^{-1} = \mathrm{d}_x(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})^{(1)},$$

wobei $x := \varphi_1(p)$ und auf der rechten Seite das Differential gemäß der Definition (1.1) haben. Insbesondere ist $\alpha_{\varphi_2,p} \circ \alpha_{\varphi_1,p}^{-1}$ ein linearer Isomorphismus. Wenn (U, φ) eine beliebige Karte um p ist, sind die Summe und die Skalarmultiplikation auf T_pM gegeben durch

$$[\gamma_1] + [\gamma_2] := \alpha_{\varphi,p}^{-1}\Big(\alpha_{\varphi,p}([\gamma_1]) + \alpha_{\varphi,p}([\gamma_2])\Big), \qquad \lambda \cdot [\gamma] := \alpha_{\varphi,p}^{-1}\Big(\lambda \alpha_{\varphi,p}([\gamma])\Big) \tag{4.3}$$

wohldefiniert. Dadurch wird $\alpha_{\varphi,p}$ zu einer linearen Abbildung, die die Koordinaten von einem Vektor in T_pM bezüglich der Basis $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\dots,m}$ gibt. Also ist $\alpha_{\varphi_2,p} \circ \alpha_{\varphi_1,p}^{-1}$ die lineare Abbildung des Basiswechsels. Das bedeutet, dass für alle $(X^i) \in \mathbb{R}^m$ und $(Y^j) \in \mathbb{R}^m$:

$$\sum_{i=i}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{j=i}^m Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p \quad \Longrightarrow \quad Y^j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x) X^i, \tag{4.4}$$

wobei y^j die j-te Koordinate der Abbildung $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ ist. Daher folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p, \qquad \forall\, i = 1, \dots, m.$$

Beweis. Wir berechnen mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\alpha_{\varphi_2,p} \circ \alpha_{\varphi_1,p}^{-1}(v) = \alpha_{\varphi_2,p}([\varphi_1^{-1} \circ \gamma_{\varphi_1(p),v}]) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\Big(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \circ \gamma_{\varphi_1(p),v}\Big) \\
&= \mathrm{d}_x(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})^{(1)} \cdot \dot{\gamma}_{\varphi_1(p),v}(0) \\
&= \mathrm{d}_x(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})^{(1)} \cdot v.
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass die Summe wohldefiniert ist (das Argument für die Skalarmuliplikation erfolgt in ähnlicher Weise). Es ist zu zeigen:

$$\alpha_{\varphi_1,p}^{-1}\Big(\alpha_{\varphi_1,p}([\gamma_1]) + \alpha_{\varphi_1,p}([\gamma_2])\Big) = \alpha_{\varphi_2,p}^{-1}\Big(\alpha_{\varphi_2,p}([\gamma_1]) + \alpha_{\varphi_2,p}([\gamma_2])\Big)$$

Das ist äquivalent zu:

$$(\alpha_{\varphi_2,p} \circ \alpha^{-1}_{\varphi_1,p})\Big(\alpha_{\varphi_1,p}([\gamma_1]) + \alpha_{\varphi_1,p}([\gamma_2])\Big) = \alpha_{\varphi_2,p}([\gamma_1]) + \alpha_{\varphi_2,p}([\gamma_2])$$

Diese Gleichung stimmt, weil wir nach der Linearität von $\alpha_{\varphi_2,p} \circ \alpha^{-1}_{\varphi_1,p}$ haben:

$$\begin{aligned}(\alpha_{\varphi_2,p} \circ \alpha^{-1}_{\varphi_1,p})\Big(\alpha_{\varphi_1,p}([\gamma_1]) + \alpha_{\varphi_1,p}([\gamma_2])\Big) &= (\alpha_{\varphi_2,p} \circ \alpha^{-1}_{\varphi_1,p}) \circ \alpha_{\varphi_1,p}([\gamma_1]) \\ &\quad + (\alpha_{\varphi_2,p} \circ \alpha^{-1}_{\varphi_1,p}) \circ \alpha_{\varphi_1,p}([\gamma_2]) \\ &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} \circ \alpha_{\varphi_1,p}([\gamma_1]) + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} \circ \alpha_{\varphi_1,p}([\gamma_2]).\end{aligned}$$

Die anderen Eigenschaften folgen nun unmittelbar. □

Aufgabe 4.6. Welche Klasse von Kurven stellt die Null in dem Vektorraum T_pM dar? △

Aufgabe 4.7. Es seien auf $\mathbb{R}^2 \setminus ([0,\infty) \times \{0\})$ sowohl kartesische Koordinaten (x^1, x^2) als auch Polarkoordinaten $(r, \theta) \in (0,\infty) \times (0, 2\pi)$ gegeben. Finden Sie die Übergangsabbildung und benutzen Sie sie, um die Darstellung von $\frac{\partial}{\partial r}$ und $\frac{\partial}{\partial \theta}$ in der Basis $\frac{\partial}{\partial x^1}$ und $\frac{\partial}{\partial x^2}$. Schreiben Sie die Koeffizienten sowohl als Funktionen von (x^1, x^2) als auch als Funktionen von (r, θ). △

Aufgabe 4.8. Es sei H ein reeller Vektorraum der Dimension n. Zeigen Sie, dass für alle $p \in H$ eine kanonische Isomorphismus $H \to T_pH$ besteht. △

Wir zeigen nun, dass das Differential einer glatten Abbildung eine lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen mit der obigen linearen Struktur liefert.

Satz 4.9. *Es sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung und p ein Punkt in M. Für alle Karten $\varphi_1 = (x^1, \ldots, x^m)$ um p und $\varphi_2 = (y^1, \ldots, y^m)$ um $F(p)$ gilt*

$$\alpha_{\varphi_2,F(p)} \circ \mathrm{d}_pF \circ \alpha^{-1}_{\varphi_1,p} = \mathrm{d}_x(\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1})^{(1)}, \tag{4.5}$$

wobei $x = \varphi_1(p)$ und auf der rechten Seite das Differential gemäß der Definition (1.1) haben. Insbesondere ist d_pF linear. Dadurch ist $\mathrm{d}_x(\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1})^{(1)}$ die Darstellung des Differentials bezüglich der durch die Karten gegebenen Koordinaten. Es gilt daher:

$$\mathrm{d}_pF\Big(\sum_{i=i}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big) = \sum_{j=i}^{m} Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p \quad \Longrightarrow \quad Y^j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x) X^i,$$

wobei y^j die j-te Koordinate der Abbildung $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ ist.

Beweis. Das Argument folgt dem, das im letzten Satz war:

$$\begin{aligned}\alpha_{\varphi_2,F(p)} \circ \mathrm{d}_pF \circ \alpha^{-1}_{\varphi_1,p}(v) = \alpha_{\varphi_2,F(p)}([F \circ \varphi_1^{-1} \circ \gamma_{\varphi_1(p),v}]) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\Big(\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} \circ \gamma_{\varphi_1(p),v}\Big) \\ &= \mathrm{d}_x(\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1})^{(1)} \cdot v.\end{aligned}$$

Da $\alpha_{\varphi_1,p}$ und $\alpha_{\varphi_2,F(p)}$ lineare Isomorphismen sind, ist die Linearität von d_pF klar. □

Definition 4.10. Es sei $\gamma : (a, b) \to M$ eine glatte Kurve. Der Tangentialvektor von γ zur Zeit $t \in (a, b)$ ist

$$\dot{\gamma}(t) := [\gamma(\cdot + t)],$$

wobei $\gamma(\cdot + t) : (a + t, b + t) \to M$ die umparametrisierte Kurve $\gamma(\cdot + t)(s) = \gamma(s + t)$ ist. △

Aufgabe 4.11. Es sei $\gamma : (a, b) \to M$ eine glatte Kurve mi t Differential $\mathrm{d}_t\gamma : T_t\mathbb{R} \to T_{\gamma(t)}M$. Unter der Identifikation $T_t\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ zeigen Sie, dass

$$\dot{\gamma}(t) = \mathrm{d}_t\gamma \cdot 1.$$

△

4.3 Die Definition durch Koordinaten

Wir zeigen nun wie die Eigenschaft (4.4) benutzt werden kann, um eine äquivalente Definition des Tangentialraums zu geben. Wir werden Zu diesem Zweck sei p ein Punkt auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Es seien weiter $\mathcal{A}_p = \{(U_k, \varphi_k)\}_{k\in K}$ die Menge aller Karten um p im maximalen Atlas $\mathcal{A}_{\max}$. Wir setzen $\psi_{kk'} := \varphi_{k'} \circ \varphi_k^{-1}$ und $x_k := \varphi_k(p)$ für alle k, k' in der Indexmenge K. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der disjunkten Vereinigung $\sqcup_{k\in K}\mathbb{R}^m_k$ deren Elementen Vektoren $(\xi^i_k)_{i=1,\dots,m}$, die in einer Kopie $\mathbb{R}^m_k$ vom $\mathbb{R}^m$ für irgendwelche $k \in K$ liegen. Die Relation ist gegeben durch

$$(\xi^i_k)_{i=1,\dots,m} \sim (\xi^j_{k'})_{j=1,\dots,m} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \xi^i_{k'} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi^i_{kk'}}{\partial x^j_k}(x_k) \cdot \xi^j_k, \quad \forall\, i = 1, \dots, m.$$

Satz 4.12. *Die Abbildung*

$$T_pM \to \Big(\bigsqcup_{k\in K} \mathbb{R}^m\Big)/\sim$$

induziert von $T_pM \to \mathbb{R}^m_k$, $[\gamma] \mapsto \alpha_{\varphi_k,p}[\gamma]$ für ein beliebiges $k \in K$ ist eine Bijektion. □

Aufgabe 4.13. Beweisen Sie den Satz. Schreiben Sie dazu die Formel für die Summe, die Skalarmultiplikation und das Differential in dem neuen Modell $\big(\bigsqcup_{k\in K} \mathbb{R}^m\big)/\sim$. △

4.4 Die Definition durch Derivationen

4.4.1 Richtungsableitungen im $\mathbb{R}^m$

In dieser äquivalenten Definition des Tangentialraums bestimmen wir Tangentialvektoren durch ihre Wirkung auf der $\mathbb{R}$-Algebra von glatten Funktionen um p. Wenn $M \subset \mathbb{R}^m$ offen ist, haben wir die Wirkung von $v \in T_pM \cong \mathbb{R}^m$ durch die Richtungsableitung

$$f \text{ glatt um } p \ \mapsto \ \frac{\partial}{\partial v}\Big|_p f := \frac{\partial f}{\partial v}(p) \in \mathbb{R}$$

gegeben ist. Diese Zuordnung liefert also ein lineares Funktional, die außerdem die Leibnizregel erfüllt:
$$\frac{\partial}{\partial v}\Big|_p(fg) = f(p)\Big(\frac{\partial}{\partial v}\Big|_p g\Big) + \Big(\frac{\partial}{\partial v}\Big|_p f\Big)g(p).$$
Außerdem haben zwei Funktionen f_1, f_2 glatte um p, die auf eine Umgebung U von p übereinstimmen, die selbe Richtungsableitung:

$$\frac{\partial}{\partial v}\Big|_p f_1 = \frac{\partial}{\partial v}\Big|_p f_2.$$

Schließlich lassen sich die Richtungsableitungen mit Hilfe von einer Kurve $\gamma_{p,v} : I_{\gamma_{p,v}} \to M$ mit $\gamma_{p,v}(0) = p$ und $\dot{\gamma}_{p,v}(0) = v$ berechnen:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \mathrm{d}_p f \cdot v = \mathrm{d}_p f \cdot \dot{\gamma}_{p,v}(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(f \circ \gamma_{p,v}).$$

Diese letzte Eigenschaft erlaubt uns Richtungsableitungen auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten zu definieren.

4.4.2 Derivationen an einem Punkt

Definition 4.14. Es sei $C^\infty_p M$ der Raum der Keimen von glatten Funktionen in p. Wir haben nämlich

$$C^\infty_p M := \{f : U \to \mathbb{R} \text{ glatt} \mid p \in U \subset M,\ U \text{ offen}\}/\sim,$$

wobei $(f_1 : U_1 \to \mathbb{R}) \sim (f_2 : U_2 \to \mathbb{R})$ genau dann, wenn eine offene Umgebung $U_{12} \subset U_1 \cap U_2$ von p existiert, sodass $f_1 = f_2$ auf U_{12}.

Der Raum der Keimen erbt von dem Raum der glatten Funktionen die Struktur einer $\mathbb{R}$-Algebra:

$$[f_1] + [f_2] := \big[f_1|_{U_{12}} + f_2|_{U_{12}}\big], \qquad \lambda[f] = [\lambda f], \qquad [f_1]\cdot[f_2] := \big[f_1|_{U_{12}} \cdot f_2|_{U_{12}}\big]. \qquad \triangle$$

Aufgabe 4.15. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und dass die Struktur von $\mathbb{R}$-Algebra wohldefiniert ist. △

Aufgabe 4.16. Es sei U eine offene Umgebung von p in M. Zeigen Sie: $C^\infty_p U \cong C^\infty_p M$. △

Bemerkung 4.17. Es sei $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$ eine Karte um p. Dann ist $[x^i] \in C^\infty_p M$. △

Es ist leicht zu sehen, dass die Evaluierung

$$\mathrm{ev} : C^\infty_p M \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ev}([f]) = f(p)$$

ein wohldefinierter Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren ist. Wir definieren dann Derivationen auf $C^\infty_p M$ als die Funktionale, die kompatibel mit der Struktur von $\mathbb{R}$-Algebra und der Evaluierung sind.

Definition 4.18. Es sei D_pM der Raum der Derivationen auf p. Die Elementen von D_pM sind nämlich lineare Abbildungen $D : C_p^\infty M \to \mathbb{R}$, die die Leibnizregel erfüllen:

$$D([f_1] \cdot [f_2]) = \mathrm{ev}([f_1]) \cdot D([f_2]) + D([f_1]) \cdot \mathrm{ev}([f_2]). \qquad \triangle$$

Nachrechnen zeigt, dass D_pM ein reeller Untervektorraum der Dualraum von $C_p^\infty M$. Der nächste wichtige Satz besagt, dass wir den Raum der Derivationen mit dem Tangentialraum an p identifizieren dürfen.

Satz 4.19. *Die Zuordnung*

$$T_pM \to D_pM, \qquad [\gamma] \mapsto D_{[\gamma]}, \qquad D_{[\gamma]}([f]) := \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \tag{4.6}$$

liefert einen wohldefinierten linearen Isomorphismus.

Beweis der Wohldefinitheit und der Injektivität im Satz 4.19. Wir zeigen zuerst, dass die Zuordnung wohldefiniert ist. Es seien $\gamma_1 \sim \gamma_2$ und (U, φ) eine Karte um p. Dann

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma_1)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_1)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} &= \mathrm{d}_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) \frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma_1)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \\
&= \mathrm{d}_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) \frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma_2)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma_2)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Die Linearität und die Leibnizregel sind einfach nachzuprüfen. Zum Beispiel

$$\begin{aligned}
D_{[\gamma]}([f_1][f_2]) = \frac{\mathrm{d}((f_1 \cdot f_2) \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}((f_1 \circ \gamma) \cdot (f_2 \circ \gamma))}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \\
&= (f_1 \circ \gamma)(0) \frac{\mathrm{d}(f_2 \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}(f_1 \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (f_2 \circ \gamma)(0) \\
&= f_1(p) D_{[\gamma]}([f_2]) + D_{[\gamma]}([f_1]) f_2(p),
\end{aligned}$$

wobei wir die Leibnizregel für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ benutzt haben.

Wir kommen jetzt zu der Injektivität. Es seien $[\gamma_1]$ und $[\gamma_2]$ mit der Eigenschaft, dass $D_{[\gamma_1]} = D_{[\gamma_1]}$. Es sei nochmal $\varphi = (x^1, \dots x^m)$ eine Karte um p. Dann lässt sich die i-te Einträge von $\alpha_{\varphi,p}([\gamma_j])$ für $j = 1, 2$ berechnen als:

$$\Big(\frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma_j)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\Big)^i = \frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma_j)^i}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}(x^i \circ \gamma_j)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = D_{[\gamma_j]}([x^i]).$$

Da i beliebig war, folgt es, dass $\alpha_{\varphi,p}([\gamma_1]) = \alpha_{\varphi,p}([\gamma_2])$, eine Eigenschaft, die gleichbedeutend mit $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ ist. $\square$

Bemerkung 4.20. Es sei $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ eine Karte um p. Wir wissen, dass $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p = \alpha_{\varphi,p}^{-1}(e_i) \in T_pM$. Das heißt, dass $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p = [\varphi^{-1} \circ \gamma_{q,e_i}]$ mit $\gamma_{q,e_i}(t) = q + te_i$, $q := \varphi(p)$. Dann

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p}([f]) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(q). \qquad \triangle$$

Um die Surjektivität von $[\gamma] \mapsto D_{[\gamma]}$ zu beweisen benötigen wir den folgenden Hilfsatz.

Hilfsatz 4.21. *Es sei $B_a(q)$ ein offener Ball des $\mathbb{R}^m$ und $q \in V$ ein Punkt. Für alle $g \in C^\infty(B_a(q))$ glatt existieren glatte Funktionen $g_1, \ldots, g_m \in C^\infty(B_a(q))$ mit der Eigenschaft:*

$$g(x) = g(q) + \sum_{i=1}^m g_i(x) \cdot (x^i - q^i), \quad g_i(q) = \frac{\partial g}{\partial x^i}(q).$$

Beweis. Wir benutzen den Hauptsatz der Integralrechnung auf $t \in [0,1] \mapsto g(q + t(x-q))$ und bekommen

$$\begin{aligned} g(q + 1(x-q)) - g(q + 0(x-q)) &= \int_0^1 \mathrm{d}_{q+t(x-q)} g \cdot (x-q) \mathrm{d}t \\ &= \Big(\int_0^1 \mathrm{d}_{q+t(x-q)} g \mathrm{d}t \Big) \cdot (x-q) \\ &= \sum_{i=1}^m \Big(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^i}(q + t(x-q)) \mathrm{d}t \Big) \cdot (x^i - q^i). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$g_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^i}(q + t(x-q)) \mathrm{d}t.$$

Diese Funktionen sind glatt, da alle die x-Ableitungen von $\frac{\partial g}{\partial x^i}(q + t(r-q))$ t-integrabel sind. Außerdem

$$g_i(q) := \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^i}(q + t(q-q)) \mathrm{d}t = \frac{\partial g}{\partial x^i}(q).$$ □

Bemerkung 4.22. Wenn wir annehmen, dass g nur der Klasse C^k ist, sind dann die Funktionen g_i der Klasse C^{k-1}. Also kann man den Hilfsatz in diesem Fall nicht benutzen, um die Surjektivität zu beweisen und tatsächlich ist der Raum der Derivationen auf $C^k_p M$ unendlich Dimensional. △

Beweis der Surjektivität im Satz 4.19. Es sei $D : C^\infty_p M \to \mathbb{R}$ eine Derivation an p. Wir zeigen zuerst, dass $D(\lambda) = 0$ für alle konstante Funktionen λ. Dank der Linearität genügt es zu zeigen $D(1) = 0$. Das folgt aber aus der Leibnizregel:

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + D(1) \cdot 1 = 2D(1).$$

Es sei nun φ eine Karte um p. Wir behaupten, dass D eine lineare Kombination der Derivationen $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p}$ ist. Genauer gilt:

$$D = \sum_{i=1}^m D(x^i) D_{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p}.$$

Es sei $[f] \in C_p^\infty M$. Dann existiert ein Repräsentant $f : \varphi^{-1}(B_a(q)) \to \mathbb{R}$ für $[f]$ mit $B_a(q) \subset U$ und $q = \varphi(p)$. Wir benutzen den Hilfsatz mit $g := f \circ \varphi^{-1}$ und bekommen $f = f(p) + \sum_{i=1}^m (g_i \circ \varphi)(x^i - q^i)$. Dann

$$\begin{aligned}
D\Big(f(p) + \sum_{i=1}^m (g_i \circ \varphi)(x^i - q^i)\Big) &= D(f(p)) + \sum_{i=1}^m D\Big((g_i \circ \varphi)(x^i - q^i)\Big) \\
&= 0 + \sum_{i=1}^m g_i(\varphi(p))D(x^i - q^i) + D(g_i \circ \varphi)(q^i - q^i) \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(q) D(x^i) \\
&= \sum_{i=1}^m D_{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p}([f]) \cdot D(x^i). \qquad \square
\end{aligned}$$

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Darstellung des Differentials von $F : M \to N$ auf dem Raum der Derivationen. Zuerst induziert das Pullback F^* einen Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren:

$$F_p^* : C_{F(p)}^\infty N \to C_p^\infty M, \qquad F_p^*[f] = [f \circ F].$$

Satz 4.23. *Die Darstellung des Differentials von $F : M \to N$ in p ist durch die duale Abbildung $F_*^p : D_p M \to D_{F(p)} N$ von F_p^* gegeben:*

$$(F_*^p \cdot D)([f]) := D(F_p^*[f]), \qquad \forall\, D \in D_p M.$$

Beweis. Es sei $D = D_{[\gamma]}$ für irgendwelche $[\gamma] \in T_p M$. Dann für alle $[f] \in C_{F(p)}^\infty N$:

$$D_{\mathrm{d}_p F[\gamma]}([f]) = D_{[F\circ\gamma]}[f] = \frac{\mathrm{d}(f \circ F \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = D_{[\gamma]}([f \circ F]) = D_{[\gamma]}(F_p^*[f]). \qquad \square$$

5 Untermannigfaltigkeiten

5.1 Definition von Immersionen und Submersionen

Wir werden im diesen Abschnitt sehen, dass die Eigenschaften des Differentials, das lokale Verhalten der Abbildung einflußen. Um welche Eigenschaften geht es, wird in den nächsten Definition klar gemacht.

Definition 5.1. Es sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung. Wir sagen, dass

- F eine Immersion bei $p \in M$ ist, falls $\mathrm{d}_p F$ injektiv ist;
- F eine Submersion bei $p \in M$ ist, falls $\mathrm{d}_p F$ surjektiv ist.

Eine Abbildung, die eine Immersion (bzw. Submersion) bei jeden Punkt ist, heißt einfach Immersion (bzw. Submersion). Wenn F eine Submersion ist, heißt $M_p := F^{-1}(p)$ die Faser über $p \in M$. △

Bemerkung 5.2. Wenn F eine Immersion bei p ist, gilt $\dim M \leq \dim N$. Wenn F eine Submersion bei p ist, gilt $\dim M \geq \dim N$. $\triangle$

Hilfsatz 5.3. *Es sei $F : M \to N$ glatt. Dann sind*

$$\{p \in M \mid \mathrm{d}_p F \text{ injektiv}\}, \quad \{p \in M \mid \mathrm{d}_p F \text{ surjektiv}\}$$

offene Teilmengen von M.

Beweis. Es sei $p \in M$ ein Punkt, sodass $\mathrm{d}_p F$ injektiv ist. Wenn $\mathrm{d}_p F$ surjektiv ist, erfolgt das Argument auf einer ähnlicher Weise.

Es seien φ_M und φ_N Karten um p und $F(p)$, sodass $\varphi_N \circ F \circ \varphi_M^{-1} : V_M \to V_N$ wohldefiniert und glatt ist. Wir betrachten $A : V_M \to \mathbb{R}^{m \times n}$ die glatte Abbildung, die zu $x \in V_M$ die Jacobi-Matrix von $\varphi_N \circ F \circ \varphi_M^{-1}$ in x zuordnet. Dann genügt es zu zeigen, dass $A(x)$ injektiv in einer Umgebung von $\varphi_M(p)$ ist. Da $A(\varphi(p))$ injektiv ist, gibt es eine quadratische Untermatrix $B(\varphi(p))$ von $A(\varphi(p))$, die durch das Streichen von $n - m$ Zeilen gegeben ist, und die invertierbar ist. Wir betrachten nun die Abbildung $B : V_M \to \mathbb{R}^{m \times m}$, wobei $B(x)$ ist die Untermatrix, die wir aus $A(x)$ durch das Streichen von den selben Zeilen wie für $q = \varphi_M(p)$ bekommen. Dann ist $B(x)$ invertierbar genau dann, wenn $\det B(x) \neq 0$. Also A ist injektiv auf der Menge $\{x \in V_M \mid \det B(x) \neq 0\}$, die eine offene Umgebung von $\varphi(p)$ ist, da B und $\det : \mathbb{R}^{m \times m} \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen sind. $\square$

Aufgabe 5.4. Es sei $\gamma : (a, b) \to M$ eine glatte Kurve. Zeigen Sie, dass γ eine Immersion bei $t \in (a, b)$ ist, genau dann wenn, $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \in T_{\gamma(t)} M$. $\triangle$

Aufgabe 5.5. Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildungen $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{RP}^n$, $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ und $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ surjektive Submersionen sind. $\triangle$

Aufgabe 5.6. Zeigen Sie, dass die Hopf-Abbildung

$$H : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n, \qquad H(z_0, \ldots, z_n) = [z_0 : \ldots : z_n]$$

eine surjektive Submersion ist. *Hinweis: Benutzen Sie die vorherige Aufgabe.* $\triangle$

Aufgabe 5.7. Es sei G eine Lie Gruppe, M eine Mannigfaltigkeit und $\Psi : G \to \mathrm{Diff}(M)$ eine glatte linke Wirkung (siehe Definition 3.47). Für alle $p \in N$ setzen wir $\Psi_p : G \to M$ als $\Psi_p(g) := \tilde{\Psi}(g, p)$. Zeigen Sie, dass für alle $h \in \mathrm{Stab}(p) = \{h \in G \mid \Psi_p(h) = p, \}$ gilt

$$F_p = F_p \circ R_h, \qquad \mathrm{d}_e F_p = \mathrm{d}_h F_p \cdot \mathrm{d}_e R_h.$$

Also haben $\mathrm{d}_h F_p$ und $\mathrm{d}_e F_p$ den selben Rang. Folgern Sie daraus, dass wenn F_p eine Submersion bei $e \in G$ ist, ist dann $\mathrm{Stab}(p)$ eine Lie-Untergruppe. $\triangle$

5.2 Lokale Darstellung von Immersionen und Submersionen

In diesem Abschnitt geben wir eine lokale kanonische Darstellung von Immersionen und Submersionen an. Der Satz wurde in Analysis III für offene Teilmengen im euklidischen Raum schon bewiesen. Der Beweis für den allgemeinen Fall lässt sich durch das Benutzen von Karten zu jenem Beweis zurückführen. Wir lassen daher in diesem Skript den Beweise für die folgende zwei Resultate aus.

Satz 5.8 (über Submersionen)**.** *Es sei $F : M \to N$ eine Submersion in $p \in M$. Es existiert eine Karte $\varphi : U_M \to V_M \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ um p, eine Karte $\varphi_N : U_N \to V_N \subset \mathbb{R}^n$ um $F(p)$, eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$, sodass*

$$V_M = W \times V_N, \qquad F(U_M) \subset U_N, \qquad \varphi_N \circ F \circ \varphi_M^{-1}(x, y) = y.$$

Insbesondere ist F eine offene Abbildung. □

Satz 5.9 (über Immersionen)**.** *Es sei $F : M \to N$ eine Immersion in $p \in M$. Es existiert eine Karte $\varphi : U_M \to V_M \subset \mathbb{R}^m$ um p, eine Karte $\varphi_N : U_N \to V_N \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \cong \mathbb{R}^n$ um $F(p)$, eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ und $c \in W$, sodass*

$$V_N = V_M \times W, \qquad F(U_M) \subset U_N, \qquad \varphi_N \circ F \circ \varphi_M^{-1}(x) = (x, c).$$ □

5.3 Charakteristische Eigenschaft von surjektiven Submersionen

Wir zeigen nun, dass surjektive Immersionen der glatte Analogon von Quotientenabbildungen sind. Um diese Aussage zu begründen brauchen wir erst eine Definition, die später eine wichtige Rolle in der Theorie der Vektorbündel auch spielt, und einen Hilfsatz.

Definition 5.10. Es sei $\pi : M \to N$ eine glatte Abbildung. Ein glatter Schnitt von π ist eine glatte Abbildung $\sigma : N \to M$, sodass $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_N$. △

Aufgabe 5.11. Zeigen Sie, dass π surjektiv ist, falls π einen glatten Schnitt besitzt. △

Aufgabe 5.12. Es sei $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass die Schnitte von π Graphen von glatten Abbildungen von M_1 nach M_2 sind. △

Hilfsatz 5.13. *Es sei $\pi : M \to N$ eine glatte Abbildung. Die folgenden zwei Aussagen sind gleichbedeutend:*

1. *π ist eine Submersion;*
2. *für alle $p \in M$ gibt es einen lokalen Schnitt von π, der durch p läuft. Das heißt: es gibt U_N offene Umgebung von $\pi(p)$ und einen Schnitt von $\pi|_{\pi^{-1}(U_N)} \to U_N$.*

Beweis. Es sei angenommen, dass π eine Submersion ist. Wir nehmen Karten φ_M und φ_N um p und $\pi(p)$, sodass

$$\varphi_N \circ \pi \circ \varphi_M^{-1} : W \times V_N \to V_N, \qquad \pi \circ \varphi_M^{-1}(x, y) = \varphi_N^{-1}(y).$$

Für $c \in W$ setzen wir

$$\sigma : U_N \to M, \qquad \sigma(q) = \varphi_M^{-1}(\varphi_N(q,c)).$$

Die Abbildung σ ist glatt als Verkettung von glatten Abbildungen. Außerdem gilt

$$\pi \circ \sigma(q) = \pi \circ \varphi_M^{-1}(\varphi_N(q),c) = \varphi_N^{-1}(\varphi_N(q)) = q.$$

Deshalb ist σ ein lokaler glatter Schnitt. Es sei umgekehrt angenommen, dass es für jede $p \in M$ eine glatte Abbildung $\sigma : U_N \to M$ und $q \in U_N$ gibt, sodass $\sigma(q) = p$ und $\pi\sigma = \mathrm{id}_{U_N}$. Die Kettenregel liefert:

$$\mathrm{d}_p\pi \cdot \mathrm{d}_q\sigma = \mathrm{id}_{T_qN}$$

und daher ist $\mathrm{d}_p\pi$ surjektiv. □

Satz 5.14. *Es sei $\pi : M \to N$ eine surjetive Submersion. Es sei weiter eine glatte Abbildung $F : M \to O$ gegeben, sodass für alle $c \in N$ die Abbildung F konstant auf dem Urbild $\pi^{-1}(c)$ ist. Dann existiert eindeutig eine glatte Abbildung $\bar{F} : N \to O$, sodass $\bar{F} \circ \pi = F$.*

Beweis. Für alle $q \in N$ definieren wir $\bar{F}(q) = F(p)$, wobei p ein beliebiger Punkt in $\pi^{-1}(q)$ ist. Laut Voraussetzung hängt die Definition nicht von p im Urbild ab. Die Eigenschaft $F = \bar{F} \circ \pi$ ist dann offenbar.

Es sei nun $q \in N$ fest. Wir nehmen $p \in \pi^{-1}(q)$ beliebig und einen lokalen Schnitt $\sigma : U_N \to \pi^{-1}(U_N)$ um q mit $\sigma(q) = p$. Dann

$$\bar{F}|_{U_N} = \bar{F}|_{U_N} \circ \mathrm{id}_{U_N} = \bar{F}|_{U_N} \circ (\pi \circ \sigma) = (\bar{F}|_{U_N} \circ \pi) \circ \sigma = F|_{\pi^{-1}(U_N)} \circ \sigma.$$

Deshalb ist $\bar{F}|_{U_N}$ als Verkettung von glatten Abbildungen auch glatt. Schließlich ist $\bar{F}$ glatt nach Hilfsatz 3.32.iii. □

Aufgabe 5.15. Zeigen Sie: es gibt Bijektione

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)_{\mathrm{per}} := \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \;\Big|\; f(\,\cdot\, + k) = f,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}^n \Big\},$$

$$C^\infty(\mathbb{RP}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})_{\mathrm{hom}} := \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \;\Big|\; f(\lambda\,\cdot\,) = f,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Big\}.$$

△

5.4 Charakteristische Eigenschaft von injektiven Immersionen

In diesem Abschnitt wollen wir eine parallele Eigenschaft wie im Satz 5.14 für injektive Immersionen $\iota : N \to O$ beweisen. Es sei nämlich eine glatte Abbildung $F : M \to O$ mit $F(M) \subset \iota(N)$ gegeben. Dann existiert eindeutig eine Abbildung $\tilde{F} : M \to N$ mit $\iota \circ \tilde{F} = F$. Die Frage ist nun: Ist es wahr, dass $\tilde{F}$ glatt ist? Die Antwort zu dieser Frage ist nein, wie die injektive Immersion

$$\iota : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad \iota(t) = (\sin(2t), \sin t)$$

zeigt. Wir können nämlich die glatte Abbildung $F : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $F(s) = (\sin(2s), \sin s)$ betrachten. Dann $F((0, 2\pi)) = \iota((-\pi, \pi))$ und

$$\tilde{F} : (0, 2\pi) \to (-\pi, \pi), \qquad \tilde{F}(s) = \begin{cases} s & \text{für } s \in (0, \pi), \\ 0 & \text{für } s = \pi, \\ s - 2\pi & \text{für } s \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Diese Abbildung ist nicht stetig und daher auch nicht glatt.

Dieses Beispiel zeigt, dass sogar die Stetigkeit der induzierten Abbildung nicht gewährleistet kann. Wir zeigen nun, dass wenn $\tilde{F}$ stetig ist, ist dann auch automatisch glatt.

Satz 5.16. *Es sei $\iota : N \to O$ eine injektive Immersion und $F : M \to O$ eine glatte Abbildung mit $F(M) \subset \iota(N)$. Es sei angenommen, dass die induzierte Abbildung $\tilde{F} : M \to N$, die durch die Gleichung $F = \iota \circ \tilde{F}$ bestimmt ist, stetig ist. Dann ist $\tilde{F}$ auch glatt.*

Beweis. Es sei $p \in M$ ein Punkt. Da ι eine Immersion ist, existieren Karten (U_N, φ_N) um $\tilde{F}(p)$ in N und (U_O, φ_O) um $F(p)$ in O, sodass

$$\varphi_O \circ \iota \circ \varphi_N^{-1} : V_N \to V_N \times W, \quad \varphi_O \circ \iota \circ (x) = (\varphi_N(x), c).$$

Da $\tilde{F}$ stetig ist, gibt es eine offene Umgebung U_M von p in M, sodass $\tilde{F}(U_M) \subset U_N$. Daher gilt auch $F(U_M) \subset U_O$ und deswegen existiert $G : U_M \to V_N$ mit

$$\varphi_O \circ F = (G, c).$$

Die Abbildung G ist glatt, da $G = \pi \circ \varphi_O \circ F$, wobei $\pi : V_N \times W \to V_N$ die kanonische Projektion ist. Daher ist auch $\varphi_N^{-1} \circ G$ auch glatt. Wir sehen nun, dass $\tilde{F} = \varphi_N^{-1} \circ G$:

$$\iota \circ \varphi_N^{-1} \circ G = \varphi_O^{-1} \circ \varphi_O \circ \iota \circ \varphi_N^{-1} \circ G = \varphi_O^{-1} \circ (\varphi_N \circ \varphi_N^{-1} \circ G, c) = \varphi_O^{-1} \circ (G, c) = F. \quad \square$$

Es bleibt nur die Frage offen: für welche injektive Immersionen $\iota : N \to O$ ist für alle $F : M \to O$ mit $F(M) \subset \iota(N)$ die induzierte Abbildung $\tilde{F}$ stetig? Eine wichtige solche Klasse ist in der folgenden Definition gegeben.

Definition 5.17. Eine Immersion $F : M \to N$ heißt Einbettung, wenn F ein Homöomorphismus auf das Bild $F(M)$ ist. △

Aufgabe 5.18. Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}^2$, $[t] \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ eine Einbettung ist. △

Satz 5.19. *Es sei $\iota : N \to O$ eine Einbettung und $F : M \to O$ eine stetige Abbildung mit $F(M) \subset \iota(N)$. Dann ist die induzierte Abbildung $\tilde{F} : M \to N$ stetig.*

Beweis. Wenn ι eine Einbettung ist, ist die Topologie auf N die Initialtopologie bezüglich ι, da U_N offen in N genau dann, wenn existiert U_O offen in O mit $U_N = \iota^{-1}(U_O)$ (warum?). Dann folgt der Satz aus der universellen Eigenschaft der Initialtopologie (siehe Abschnitt 2.8.3). □

5.5 Definition von Untermannigfaltigkeiten

Mittels der Sätze im vorherigen Abschnitt können wir Immersionen und Submersionen benutzen, um eingebettete Untermannigfaltigkeiten zu konstruieren. Wir brauchen dafür zwei Definitionen.

Definition 5.20. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $S \subset M$ heißt Untermannigfaltigkeit von M der Dimension $s \leq m$ oder der Kodimension $m - s$, wenn für alle $p \in S$ eine Karte (U, φ) von M um p existiert, sodass

$$\varphi(S \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^s \times \{c\})$$

für ein gewissenes $c \in \mathbb{R}^{s-m}$, wobei wir $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s} \cong \mathbb{R}^m$ identifizieren. Wir sagen, dass die Karte (U, φ) angepasste zu der Untermannigfaltigkeit S ist. △

Bemerkung 5.21. Eine Untermannigfaltigkeit S ist lokal abgeschlossen in M mit der Teilraumtopologie. Es folgt aus Satz (2.66), dass es eine offene Umgebung U von S gibt, sodass S abgeschlossen in U ist. △

Beispiel 5.22. Es sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung. Dann ist der Graph

$$\Gamma_F := \{(p_1, p_2) \in M \times N \mid p_2 = F(p_1)\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $M \times N$ der Dimension m. Es sei nämlich $(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2)$ eine Produktkarte um $(p_1, p_2) \in M \times N$, sodass $F(U_1) \subset U_2$. Wir setzen $G := \varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ und definieren den Diffeomorphismus

$$\Psi : V_1 \times V_2 \to V := \Psi(U_1 \times U_2), \qquad \Psi(x_1, x_2) = (x_1, x_2 - G(x_1)).$$

Dann ist $(U_1 \times U_2, \varphi := \Psi \circ (\varphi_1, \varphi_2))$ die gewünschte Karte. △

Definition 5.23. Eine Lie-Untergruppe H von einer Lie-Gruppe G ist eine Teilmenge $H \subset G$, die sowohl eine Untergruppe als auch eine Untermannigfaltigkeit ist. Dann ist H eine Lie-Gruppe und $\iota : H \to G$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen. △

Satz 5.24. *Es sei $S \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension s. Dann existiert ein Atlas auf S, sodass S eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension s ist und die Inklusion $\iota : S \to M$ eine Einbettung ist.*

Beweis. Wir versehen S mit dem Teilraumtopologie. Dann ist S hausdorffsch und mit abzählbarer Basis, da M die selben Eigenschaften hat.

Es sei nun $p \in S$ und $(U_{p,M}, \varphi_{p,M})$ eine Karte um p in M mit

$$\varphi_{p,M}(S \cap U_{p,M}) = V_{p,M} \cap (\mathbb{R}^s \times \{0\}).$$

Wir setzen

$$U_{p,S} := S \cap U_{p,M}, \quad V_{p,S} := V_{p,M} \cap (\mathbb{R}^s \times \{0\}), \quad \varphi_{p,S} := \varphi_{p,M}|_{U_{p,S}} : U_{p,S} \to V_{p,S}.$$

Dann ist $V_{p,S}$ offen in $\mathbb{R}^s$ und φ_S ist als Einschränkung von einem Homöomorphismus nochmal ein Homöomorphismus denn wir benutzen die Teilraumtopologie. Wir behaupten, dass $\mathcal{A}_S := \{(U_{p,S}, \varphi_{p,S})\}_{p\in S}$ ein Atlas auf S ist. Wir haben nämlich

$$\varphi_{p_2,M} \circ \varphi_{p_1,M}^{-1}(x,0) = (\varphi_{p_2,S} \circ \varphi_{p_1,S}^{-1}(x), 0).$$

Daher ist $\varphi_{p_2,S} \circ \varphi_{p_1,S}^{-1}$ glatt denn so ist $\varphi_{p_2,M} \circ \varphi_{p_1,M}^{-1}$. Wir zeigen nun, dass die Inklusion $\iota : S \to M$ eine Einbettung ist. Da S mit der Teilraumtopologie versehen ist, ist ι automatisch ein Homöomorphismus auf das Bild. Außerdem haben wir $\jmath_p := \varphi_{p,M} \circ \iota \circ \varphi_{p,S}^{-1}$ mit $\jmath_p(x) = (x,0)$ und $\mathrm{d}_x\jmath_p^{(1)} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist die injektive lineare Abbildung $\mathrm{d}_x\jmath_p^{(1)} \cdot v = (v,0)$. Dann ist $\mathrm{d}_p\iota$ injektiv nach (4.5). □

Satz 5.25. *Es sei $F : M \to N$ eine Einbettung. Dann ist $F(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von N der Dimension* $\dim M$ *und $F : M \to F(M)$ ist ein Diffeomorphismus.*

Beweis. Es wird in Aufgabe 6-1 und Aufgabe 6-2 in dem Zettel bewiesen. □

Satz 5.26. *Es sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung und es sei $q \in F(M)$ gegeben, sodass F eine Submersion in jedem $p \in F^{-1}(q)$ ist. Dann ist $F^{-1}(q)$ eine Untermannigfaltigkeit von M der Kodimension n und, wenn $\iota : F^{-1}(q) \to M$ die Inklusion ist, gilt*

$$\mathrm{d}_p\iota\Big(T_p\big(F^{-1}(q)\big)\Big) = \ker \mathrm{d}_pF \subset T_pM, \qquad \forall\, p \in F^{-1}(q). \tag{5.1}$$

Beweis. Es sei $p \in F^{-1}(q)$ und es sei (U_M, φ_M) und (U_N, φ_N) Karten um p und q, sodass

$$G_p := \varphi_N \circ F \circ \varphi_M^{-1} : W \times V_N \to V_N, \qquad G_p(x,y) = y.$$

Es sei $(x_p, y_p) := \varphi_M(p)$, sodass $y_p = \varphi_N(q)$. Dann

$$\varphi_M(F^{-1}(q) \cap U_M) = W \times \{y_p\} = (W \times V_N) \cap (\mathbb{R}^{n-m} \times \{y_p\}).$$

Da $p \in F^{-1}(q)$ beliebig war, haben wir bewiesen, dass $F^{-1}(q)$ eine Untermannigfaltigkeit von M der Dimension $m-n$ ist. Um die Formel (5.1) zu zeigen, beweisen wir, dass $\mathrm{d}_x\jmath_p(\mathbb{R}^{m-n}) = \ker \mathrm{d}_{(x,0)}G_p$, wobei $\jmath_p = \varphi_M \circ \iota \circ \varphi_{F^{-1}(q)}^{-1}$. Wir wissen aber, dass $\jmath_p(x) = (x, y_p)$ und $G_p(x,y) = y$. Daher ist $\mathrm{d}_x\jmath \cdot u = (u,0)$ und $\mathrm{d}_{(x,0)}G_p(u,v) = v$ und die gewünschte Formel ist offenbar. □

Bemerkung 5.27. Es sei S^n_r die n-Sphäre mit der glatten Struktur aus Abschnitt 3.1. Wir behaupten, dass die Inklusion $\iota : S^n_r \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Einbettung ist. Die Inklusion ist ein Homöomorphismus auf das Bild, weil die Topologie auf S^n_r die Teilraumtopologie ist. Außerdem haben wir die Darstellung

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}\iota \circ (\varphi_i^{\pm})^{-1}(y) = (y_1, \ldots, y_{i-1}, \pm\sqrt{r^2 - |y|^2}, y_i, \ldots, y_n).$$

Es ist offenbar zu sehen, dass diese Abbildung glatt ist und ein injektives Differenzial an jedem $y \in B_1(0)$ besitzt.

Wir können S^n_r auch als Niveaumenge einer Funktion erfassen. Wir setzen $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = \frac{1}{2}|x|^2$. Dann ist $S^n_r = f^{-1}(r^2/2)$. Außerdem $\mathrm{d}_x f \cdot v = \langle x, v\rangle$, das euklidische Skalarprodukt zwischen x und v. Also $\mathrm{d}_x f \neq 0$ für alle $x \neq 0$ und wir folgern aus Satz 5.26, dass

$$\mathrm{d}_x \iota(T_x S^n) = \ker \mathrm{d}_x f = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v\rangle = 0\}. \qquad \triangle$$

Beispiel 5.28. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die Determinante $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist ein Homomorphismus von Lie-Gruppen. Es sei $SL_n(\mathbb{K}) := \ker \det = \det^{-1}(1)$. Wir haben $\mathrm{d}_e \det \cdot H = \mathrm{Spur}(H)$. Da $\mathrm{d}_e \det \cdot (\lambda e) = n\lambda$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt, sehen wir nach Aufgabe 5.7 und Bemerkung 3.49, dass det eine Submersion an jedem Element von $SL_n(\mathbb{K})$ ist. Daher ist $SL_n(\mathbb{K})$ eine Untermannigfaltigkeit in $GL_n(\mathbb{K})$ der Kodimension $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$. $\triangle$

Beispiel 5.29. Wir definieren die glatte rechte Wirkung

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \qquad (S, A) \mapsto A^T S A.$$

Da jede $S \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Bilinearform $B_S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $B_S(u, v) = \langle u, Sv\rangle$ induziert, können wir diese Wirkung als die Wirkung $(B, A) \mapsto B(A\cdot, A\cdot)$ auf dem Vektorraum von symmetrischen Bilinearformen.

Es seien nun p, q natürliche Zahlen, sodass $n = p + q$. Wir definieren $I^{p,q} \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ als die diagonale Matrix mit

$$I^{p,q}_{jj} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = 1, \dots, p; \\ -1 & \text{für } j = p+1, \dots, n. \end{cases}$$

Wir definieren $F_{p,q} : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ als $F_{p,q}(A) = A^T I^{p,q} A$ und setzen

$$O(p, q) := F^{-1}_{p,q}(I^{p,q}) = \mathrm{Stab}(I^{p,q})$$

(siehe Definition 3.44). Es herrscht die Symmetrie $O(p, q) = O(q, p)$. Es gilt

$$\mathrm{d}_e F_{p,q} : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{d}_e F_{p,q} H = H^T I^{p,q} + I^{p,q} H, \quad \forall\, H \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}).$$

Das Differential ist surjektiv, da

$$\mathrm{d}_e F_{p,q}(\tfrac{1}{2} I^{p,q} S) = S, \quad \forall\, S \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}).$$

Daher ist $O(p, q)$ eine Lie-Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$. Wenn $A \in O(p, q)$, dann

$$\det(A^T I^{p,q} A) = \det I^{p,q}.$$

Daher $\det A = \pm 1$ und beide Möglichkeiten erfolgen können. Dann ist

$$SO(p, q) := O(p, q) \cap SL_n(\mathbb{R})$$

eine offene Untergruppe von $O(p, q)$.

Wenn $p = n$ und $q = 0$, dann schreiben wir $O(n) := O(n, 0)$ und $SO(n) := SO(n, 0)$. In diesem Fall ist $SO(n)$ kompakt und zusammenhängend.

Wenn p und q beide positiv sind, besitzt $SO(p, q)$ zwei zusammenhängende Komponenten $SO^+(p, q)$ und $SO^-(p, q)$. Daher besitzt $O(p, q)$ vier Komponenten, die wie folgt beschrieben werden können. Wenn $A \in O(p, q)$ können wir die Zerlegung $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ benutzen um A als Blockmatrix zu erfassen:

$$A = \begin{pmatrix} A_+ & B \\ C & A_- \end{pmatrix}.$$

Da A die Bilinearform $B_{I^{p,q}}$ erhält, kann man sehen (wie?), dass A_+ und A_- invertierbar sind. Die vier Komponenten von $O(p, q)$ werden durch die Vorzeichen von $\det A_+$ und $\det A_-$ bestimmt. Insbesondere ist $A \in SO^+(p, q)$ wenn $\det A_+$ und $\det A_-$ positiv sind und $A \in SO^-(p, q)$ wenn $\det A_+$ und $\det A_-$ negativ sind. Schließlich ist $SO^+(p, q)$ nicht kompakt für $p, q > 0$. △

Aufgabe 5.30. Wir betrachten die glatte rechte Wirkung

$$\overline{\mathrm{Sym}}_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}) \to \overline{\mathrm{Sym}}_n(\mathbb{C}), \qquad (S, A) \mapsto A^* S A.$$

wobei $A* := \bar{A}^T$, die komplex koniugierte transponierte Matrix ist. Zeigen Sie, dass der Stabilisator der Einheitsmatrix I

$$U(n) := \mathrm{Stab}(I)$$

eine Lie-Untergruppe von $GL_n(\mathbb{C})$ ist. Berechnen Sie ihre Dimension und beschreiben Sie den Tangentialraum $T_e U(n)$. Zeigen Sie weiter, dass

$$SU(n) := U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$$

auch eine Lie-Untergruppe ist. Berechnen Sie ihre Dimension und beschreiben Sie den Tangentialraum $T_e SU(n)$. △

Aufgabe 5.31. Es seien $\pi : M \to O$ eine surjektive Submersion und $F : N \to O$ eine glatte Abbildung. Das Faserprodukt von π und F ist definiert als

$$M \,{}_\pi\!\times_F N := \{(p_1, p_2) \in M \times N \mid \pi(p_1) = F(p_2)\}.$$

Zeigen Sie, dass $M \,{}_\pi\!\times_F N$ eine Untermannigfaltigkeit von $M \times N$ der Kodimension $\dim O$ ist und dass die kanonischen Projektionen $\nu_M : M \,{}_\pi\!\times_F N \to M$ und $\nu_N : M \,{}_\pi\!\times_F N \to N$ glatt sind und dass ν_N eine surjektive Submersion ist. Wenn F auch eine surjektive Submersion ist, folgern Sie daraus, dass

$$\Pi : M \,{}_\pi\!\times_F N \to O, \quad \Pi(p_1, p_2) := \pi(p)$$

eine Submersion ist und dass

$$\Pi^{-1}(p) \;\text{ diffeomorph zu }\; \pi^{-1}(p) \times F^{-1}(p), \quad \forall\, p \in O. \qquad △$$

Der Begriff von Mannigfaltigkeit hat sich während einer langen Zeit entwickelt. Einer der Meilensteine auf diesem Weg wurde von Poincaré 1895 in seinem Artikel *Analysis Situ* gesetzt, wo er Mannigfaltigkeiten extrinsisch definierte als Untermannigfaltigkeiten des euklidischen Raums ungefähr nach der Definition 5.20. Die intrinsische Definition 3.12 wurde 1936 erstmal von Hassler Whitney auf einer mathematischen Zeitschrift veröffentlicht. In seinem Artikel bewies er, dass die extrinsische und die intrinsische Definition äquivalent waren. Er vertieft seine Entdeckung 1944 mit dem folgenden Resultat.

Satz 5.32 (Whitney's hard embedding theorem)**.** *Für alle Mannigfaltigkeit M existiert eine Einbettung $\iota : M \to \mathbb{R}^{2\dim M}$.* □

Bemerkung 5.33. Wenn M gegeben ist, könnte man sich fragen, welche die minimale Dimension $w(M)$ ist, sodass M eine Einbettung in $\mathbb{R}^{w(M)}$ besitzt. Nach dem Satz von Whitney wissen wir, dass $w(M) \leq 2\dim M$. Wenn $M = \mathbb{RP}^m$ und m eine Potenz von 2 ist, gilt genau $w(M) = 2\dim M$. In vielen Fällen ist aber $w(M) < 2\dim M$. Zum Beispiel gilt $w(S^m) = m + 1 = w(\mathbb{T}^m)$ (warum?). △

6 Vektorbündel

Im Abschnitt 4 haben wir für jeden Punkt p einer Mannigfaltigkeit M mit $m := \dim M$ einen Vektorraum der Dimension m definiert, den Tangentialraum T_pM, dessen Elementen Äquivalenzklassen $[\gamma]_p$ von Kurven durch p sind, wobei wir die Notation $[\gamma]_p$ statt $[\gamma]$ einführen, um klar zu machen im welchen Tangentialraum die Klasse wohnt.

Wenn wir den Tangentialraum einer Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ betrachten (zum Beispiel $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$), sehen wir aber auch, dass T_pM kontinuerlich mit p variiert. Können wir diese Kontinuität für allgemeine Mannigfaltigkeiten präzis definieren? Ja, indem wir auf

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM,$$

dem sogenannten Tangentialraum von M, eine glatte Struktur konstruieren. Das wird uns motivieren, den allgemeinen Begriff von Vektorbündel zu betrachten, das heißt eine beliebige Familie von Vektorräumen $p \mapsto E_p$, die kontinuerlich mit dem Punkt $p \in M$ variieren.

6.1 Der Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit

Um eine glatte Struktur auf TM zu definieren werden wir Hilfsatz 3.24 anwenden. Wir betrachten zuerst die kanonische Projektion

$$\pi : TM \to M, \qquad \pi\big([\gamma]_p\big) = p.$$

Es sei weiter $\mathcal{A}_M = \{(U, \varphi)\}_{i \in I}$ ein Atlas auf M, der die Voraussetzungen 4 und 5 im Hilfsatz 3.24 erfüllt. Dann für alle $i \in I$ und $p \in U_i$ haben wir den linearen Isomorphismus

$\alpha_{\varphi_i,p} : T_pM \to \mathbb{R}^m$ definiert. Das gibt uns eine Bijektion

$$\Phi_i : \pi^{-1}(U) \to V_i \times \mathbb{R}^m, \qquad \Phi_i\big([\gamma]_p\big) = \big(\varphi_i(p), \alpha_{\varphi_i,p}([\gamma]_p)\big), \tag{6.1}$$

wobei $V_i \times \mathbb{R}^m$ eine offene Menge des $\mathbb{R}^{2m}$ ist. Die Inverse ist gegeben durch

$$\Phi_i^{-1}(x,v) = \big(\varphi_i^{-1}(x), \alpha^{-1}_{\varphi_i,\varphi_i^{-1}(x)}(v)\big) =: \frac{\partial}{\partial v}\Big|_{\varphi_i^{-1}(x)}.$$

Wir setzen $\mathcal{A}_{TM} := \{(\pi^{-1}(U_i), \Phi_i)\}_{i\in I}$. Dann $\{\pi^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ ist eine Überdeckung von TM. Für $i, j \in I$ bekommen wir

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m,$$

wobei nach Satz 4.5 die folgende Formel gilt:

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(q,v) = \big(\psi_{ij}(q), \mathrm{d}_q\psi_{ij}^{(1)} \cdot v\big), \qquad \psi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}.$$

Die rechte Seite ist glatt, da ψ_{ij} glatt ist (hier ist nochmal wichtig mit glatten Mannigfaltigkeiten statt einfach C^k-Mannigfaltigkeiten zu arbeiten).

Also erfüllt $\mathcal{A}_{TM}$ die Voraussetzungen 1, 2 und 3 im Hilfsatz 3.24 als auch die Voraussetzungen 4 und 5 (warum?). Wir schließen daraus, dass $(TM, [\mathcal{A}_{TM}])$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Außerdem ist $\pi : TM \to M$ eine glatte Submersion, da sie sich so in lokalen Koordinaten schreiben lässt:

$$\varphi_i \circ \pi \circ \Phi_i^{-1}(q,v) = q.$$

Beispiel 6.1. Wenn $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, haben wir den Diffeomorphismus

$$\alpha_{\mathrm{id}_U} : TU \cong U \times \mathbb{R}^n, \qquad [\gamma]_p \mapsto (p, \dot\gamma(0)). \qquad \triangle$$

Wenn $F : M \to N$ eine glatte Abbildung ist, definieren wir

$$\mathrm{d}F : TM \to TN, \qquad \mathrm{d}F([\gamma]_p) = [F \circ \gamma]_{F(p)}.$$

Es seien (U_M, φ_M) und (U_N, φ_N) Karten mit $F(U_M) \subset U_N$. Dann $\mathrm{d}F(\pi_M^{-1}(U_M)) \subset \pi_N^{-1}(U_N)$ und, wenn wir $\psi_F := \varphi_N \circ F \circ \varphi_M^{-1}$ defineren, gilt die lokale Darstellung

$$\Phi_N \circ \mathrm{d}F \circ \Phi_M^{-1}(q,v) = \big(\psi_F(q), \mathrm{d}_q\psi_F^{(1)} v\big), \tag{6.2}$$

wobei Φ_M und Φ_N durch (6.1) mit $\varphi_i = \varphi_M$ und $\varphi_i = \varphi_N$ gegeben sind. Also ist $\mathrm{d}F$ glatt, da ψ_F glatt ist. Schließlich können wir Vektorfelder einführen.

Definition 6.2. Ein glattes Vektorfeld X auf M ist ein glatter Schnitt von $\pi : TM \to M$. Das heißt: $X : M \to TM$ ist eine glatte Abbildung mit $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$. Der Nullschnitt ist die Abbildung $0_{TM} : M \to TM$, sodass $0_{TM}(p)$ der Nullvektor im Vektorraum T_pM für alle $p \in M$ ist. Die Nullstellen von X sind die Punkten $p \in M$, für die $X(p) = 0_{TM}(p)$. Wir schreiben $\mathcal{X}(M)$ für die Menge der glatten Vektorfelder auf M. $\triangle$

Bemerkung 6.3. Es sei $X : M \to TM$ ein Schnitt von $\pi : TM \to M$, der nicht unbedingt glatt ist. Wenn (U, φ) eine Karte auf M und (TM_U, Φ) die entsprechende Karte auf TM ist, existiert dann eine Abbildung $X_\Phi : V \to \mathbb{R}^m$, sodass

$$\Phi \circ X \circ \varphi^{-1}(q) = (q, X_\Phi(q)).$$

Deshalb ist die Abbildung X glatt (und somit ein glattes Vektorfeld) genau dann, wenn X_Φ glatt ist für alle Karten Φ. $\triangle$

Bemerkung 6.4. Wir behaupten, dass die Menge $\mathcal{X}(M)$ die Struktur einer $C^\infty(M)$-Modul besitzt. Wenn $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathcal{X}(M)$ setzen wir $fX : M \to TM$ als das punktweise Produkt $(fX)(p) = f(p)X(p)$ für alle $p \in M$. Nach der vorherigen Bemerkung sehen wir, dass $(fX)_\Phi = (f \circ \varphi^{-1})X_\Phi$. Also die rechte Seite ist glatt als Multiplikation zwischen glatten Abbildungen. $\triangle$

Beispiel 6.5. Es sei $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$p \mapsto \frac{\partial}{\partial v}\Big|_p = \alpha^{-1}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}}(p, v), \qquad p \in \mathbb{R}^n$$

ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$, die wir als $\frac{\partial}{\partial v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{TR}^n$ bezeichnen. Wenn $q \in \mathbb{R}^n$ und $\tau_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Translation $\tau_q(x) = x + q$ ist, dann gilt

$$\mathrm{d}\tau_q \circ \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \circ \tau_q.$$

Es sei nun $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$, $\pi(p) = [p]$ die Quotientenabbildung. Wir behaupten, dass die Abbildung

$$[p] \in \mathbb{T}^n \mapsto \mathrm{d}_p\pi \cdot \frac{\partial}{\partial v}\Big|_p, \qquad [p] \in \mathbb{T}^n$$

ein wohldefiniertes Vektorfeld auf $\mathbb{T}^n$ liefert. Wohldefinitheit: Wenn $p' \in \mathbb{R}^n$ ein weiterer Punkt mit $[p'] = [p]$, dann $k := p' - p \in \mathbb{Z}^n$ und, wenn $\tau_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Translation ist, bekommen wir $\pi \circ \tau_k = \pi$. Daher

$$\mathrm{d}_{p'}\pi \cdot \frac{\partial}{\partial v}\Big|_{p'} = \mathrm{d}_{p'}\pi \cdot \frac{\partial}{\partial v}\Big|_{\tau_k(p)} = \mathrm{d}_{p'}\pi \cdot \mathrm{d}_p\tau_k \cdot \frac{\partial}{\partial v}\Big|_p = \mathrm{d}_p(\pi \circ \tau_k) \cdot \frac{\partial}{\partial v}\Big|_p = \mathrm{d}_p\pi \cdot \frac{\partial}{\partial v}\Big|_p.$$

Glattheit: Es sei $\varphi : U \to V$ eine Karte um p, die zu dem Standard-Produktatlas gehört, sodass $\varphi^{-1} = \pi|_V$. Dann ist

$$\alpha_\varphi\Big(\mathrm{d}_{\varphi^{-1}(q)}\pi \cdot \frac{\partial}{\partial v}\Big|_{\varphi^{-1}(q)}\Big) = \Big(q, \alpha_{\varphi,\varphi^{-1}(q)}\big(\mathrm{d}_{\varphi^{-1}(q)}\pi \cdot \alpha^{-1}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n},q}(v)\big)\Big) = (q, \mathrm{d}_q(\varphi \circ \pi)^{(1)} \cdot v) = (q, v)$$

und die Abbildung $q \mapsto (q, v)$ ist offensichtlich glatt. Wir bezeichnen auch dieses Vektorfeld als $\frac{\partial}{\partial v} : \mathbb{T}^n \to T\mathbb{T}^n$. $\triangle$

6.2 Definition von Vektorbündeln

Definition 6.6. Es sei $\pi : E \to M$ eine surjektive Submersion, sodass jede Faser $E_p := \pi^{-1}(p)$ die Struktur eines k-dimensionalen Vektorraums besitzt. Eine Trivialisierung von π über einer offenen Menge U von M ist ein Diffeomorphismus $\chi : E_U \to U \times \mathbb{R}^k$ mit $E_U := \pi^{-1}(U)$, sodass für alle $p \in U$ gilt:

$$(i)\ \ \chi(E_p) = \{p\} \times \mathbb{R}^k, \qquad (ii)\ \ \chi|_{E_p} : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k \quad \text{ist ein linearer Isomorphismus.}$$

Für alle $p \in U$ existiert daher ein linearer Isomorphismus $\xi(p) : E_p \to \mathbb{R}^k$, sodass

$$\chi(e) = \big(\pi(e), \xi(\pi(e)) \cdot e\big), \qquad \forall e \in E_U. \qquad \triangle$$

Bemerkung 6.7. Die Bedingung $\chi(E_p) = \{p\} \times \mathbb{R}^k$ für alle $p \in U$ lässt sich auch als $\pi_1 \circ \chi_i = \pi$ reformulieren, wobei $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^k \to U$ die Projektion auf den ersten Faktor ist. $\triangle$

Bemerkung 6.8. Wenn χ_1 und χ_2 zwei Trivialisierungen von π über U_1 und U_2 offene Teilmengen von M sind, dann die Bedingungen (i) und (ii) implizieren, dass es eine glatte Abbildung $A_{12} : U_1 \cap U_2 \to GL_k(\mathbb{R})$ mit

$$\chi_2 \circ \chi_1^{-1} : (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^k \to (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^k, \qquad \chi_2 \circ \chi_1^{-1}(p, v) = (p, A_{12}(p) \cdot v)$$

existiert. Die Abbildung A_{12} heißt Übergangsfunktion zwischen den Trivialisierungen. $\triangle$

Definition 6.9. Ein reelles Vektorbündel vom Rang k über eine Mannigfaltigkeit M der Dimension m ist eine surjektive Submersion $\pi : E \to M$ zwischen einer Mannigfaltigkeit E (der Dimension $k + m$), dem sogenannten Totalraum des Bündels) und der Mannigfaltigkeit M, der sogenannten Basis des Bündels, mit den folgenden Eigenschaften:

1. jede Faser $E_p := \pi^{-1}(p)$ besitzt die Struktur eines k-dimensionalen Vektorraums, dessen Nullelement mit 0_p bezeichnet wird;

2. es gibt eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von M und eine Familie von Trivialisierungen $\{\chi_i : E_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^k\}_{i \in I}$ von π über den Elementen der Überdeckung.

Wenn π eine Trivialisierung $\chi : E \to M \times \mathbb{R}^k$ über die ganze M zulässt, sagen wir, dass π ein triviales Vektorbündel ist. $\triangle$

Bemerkung 6.10. Wir werden oft ein Vektorbündel $\pi : E \to M$ mit seinem Totalraum E identifizieren, wenn die Abbildung π vom Kontext klar ist. $\triangle$

Beispiel 6.11. Wenn $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel und U eine offene Teilmenge von M ist, ist die Einschränkung $\pi_U : \pi^{-1}(U) \to U$ ein Vektorbündel über U. $\triangle$

Beispiel 6.12. Für alle Mannigfaltikeiten M und alle natürliche Zahlen k ist die Standardprojektion $M \times \mathbb{R}^n \to M$ ein triviales Vektorbündel vom Rang k. $\triangle$

Beispiel 6.13. Das Tangentialbündel $\pi : TM \to M$ ist ein Vektorbündel vom Rang $\dim M$. Wenn (U_i, φ_i) eine Karte von M ist, ist dann

$$\chi_i : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^m, \qquad \chi_i([\gamma]_p) = (p, \alpha_{\varphi_i,p}([\gamma]_p))$$

eine Trivialisierung denn $\alpha_{\varphi_i,p}$ ein linearer Isomorphismus ist und χ_i ein Diffeomorphismus ist, da $\chi_i = (\varphi_i^{-1}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}) \circ \Phi_i$ gilt und $(\varphi_i^{-1}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})$ und Φ_i Diffeomorphismen sind denn φ_i und Φ_i Karten von M und TM sind. Die Übergangsfunktion zwischen zwei Trivialisierungen ist

$$A_{ij} : U_i \cap U_j \to GL_m(\mathbb{R}), \qquad A_{ij}(p) = \mathrm{d}_{\varphi_i(p)} \psi_{ij}^{(1)}, \qquad \text{wobei } \psi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}. \qquad \triangle$$

6.3 Rahmen

Wenn $\chi : E_U \to U \times \mathbb{R}^k$ eine Trivialisierung eines Vektorbündels $\pi : E \to M$ ist, bekommen wir k glatte Schnitte

$$\sigma_i : U \to E, \qquad \sigma_i(p) := \chi_i^{-1}(p, e_i), \qquad i = 1, \dots, k,$$

sodass $\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)$ eine Basis von E_p für alle $p \in U$ sind.

Wir geben also die folgende Definition.

Definition 6.14. Es sei U eine offene Menge von M. Ein (lokaler) Rahmen von π über U ist eine k-Tupel von glatten Schnitten $\sigma_1, \dots, \sigma_k : U \to E_U$ von π über U, sodass $\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)$ eine Basis von E_p für alle $p \in U$ geben. $\triangle$

Bemerkung 6.15. Nach der Definition von Vektorbündel besitzt jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung U, über die ein Rahmen von π existiert. Wir sagen, dass solcher Rahmen ein lokaler Rahmen um p ist. $\triangle$

Wir haben gesehen, dass einen Trivialisierung über U einen Rahmen über U liefert. Umgekehrt können wir aus einem Rahmen eine Trivialisierung konstruieren.

Hilfsatz 6.16. *Es sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel und es sei $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ ein Rahmen über einer offenen Teilmenge U von M. Die Abbildung*

$$\mu : U \times \mathbb{R}^k \to E_U, \qquad (p, v) \mapsto \sum_{i=1}^{k} v_i \cdot \sigma_i(p), \quad v = (v_1, \dots, v_k)$$

ist ein Diffeomorphismus, dessen Inverse $\chi := \mu^{-1}$ eine Trivialisierung über U ist.

Beweis. Die Abbildung μ ist faserweise linear und eine Bijektion, da die σ_i einen Rahmen bilden. Zu zeigen, dass μ ein Diffeomorphismus ist, reicht es zu beweisen, dass μ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Es sei dafür $p \in U$ beliebig und $\chi' : E_{U'} \to U' \times \mathbb{R}^k$ eine Trivialisierung um p. Wir haben die glatte Abbildungen

$$v_i : U \cap U' \to \mathbb{R}^k, \qquad v_i(p) = \pi_2(\chi'(\sigma_i(p))), \quad \text{wobei } \pi_2 : U \cap U' \to \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

die Projektion auf den zweiten Faktor ist. Die Matrixabbildung $A : U \cap U' \to GL_k(\mathbb{R})$, die diese Abbildungen als Spalten hast ist auch glatt und mit Werten in $GL_k(\mathbb{R})$, da die σ_i ein Rahmen sind. Dann gilt

$$\chi' \circ \mu : (U \cap U') \times \mathbb{R}^k \to (U \cap U') \times \mathbb{R}^k, \qquad \chi \circ \mu(p, v) = (p, A(p) \cdot v)$$

und

$$\mu^{-1} \circ (\chi')^{-1} : (U \cap U') \times \mathbb{R}^k \to (U \cap U') \times \mathbb{R}^k, \qquad \mu^{-1} \circ (\chi')^{-1}(p, v) = (p, A(p)^{-1} \cdot v).$$

Daher sind $\chi' \circ \mu$ und $\mu^{-1} \circ (\chi')^{-1}$ glatt. Da χ' ein Diffemorphismus ist, folgt es daraus, dass μ und μ^{-1} glatt auf $(U \cap U') \times \mathbb{R}^k$ und $E_{U \cap U'}$ sind. $\square$

Aufgabe 6.17. Es sei $\pi : E \to M$ eine surjektive Submersion und $\Pi : E_\pi \times_\pi E \to M$ das Faserprodukt. Wir sagen, dass π ein schwaches reelles Vektorbündel der Dimension k ist, wenn es drei glatte Abbildungen $0_E : M \to E$, $\mu_E : \mathbb{R} \times E \to E$ und $+_E : E_\pi \times_\pi E \to E$ gibt, sodass

- 0_E ein Schnitt von π ist;
- $\mu_E(\mathbb{R} \times E_p) \subset E_p$, und $+_E((E_p)_\pi \times_\pi (E_p)) \subset E_p$ für alle $p \in M$ gilt;
- $(E_p, +_E|_{(E_p)_\pi \times_\pi (E_p)}, \mu_E|_{\mathbb{R} \times E_p})$ eine reelle Vektorraumstruktur der Dimension k liefert.

Zeigen Sie: ein schwaches Vektorbündel ist ein Vektorbündel genau dann, wenn es einen Rahmen über die Umgebung von allen Punkten besitzt. $\triangle$

6.4 Kriterium für die Konstruktion von Vektorbündeln

Zu zeigen, dass TM eine Mannigfaltigkeit und sogar ein Vektorbündel ist, haben wir den Hilfsatz 3.24 benutzt. Wir können weiter diesen Hilfsatz anwenden, um ein entsprechendes Kriterium für allgemeine Vektorbündel zu formulieren. Das wird eine wichtige Rolle in den algebraischen Konstruktionen im nächsten Abschnitt spielen.

Satz 6.18. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit, E eine Menge und $\pi : E \to M$ surjektiv, sodass es einen Atlas $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$ auf M und eine Familie von Bijektionen $\{\chi_i : E_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^k\}_{i \in I}$ mit den Eigenschaften:*

- *$\pi_1 \circ \chi_i = \pi$, wobei $\pi_1 : U_i \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ die Standardprojektion ist;*
- *für alle $i, j \in I$ gibt es eine glatte Abbildung $A_{ij} : U_i \cap U_j \to GL_k(\mathbb{R})$, sodass*

$$\chi_j \circ \chi_i^{-1}(p, v) = (p, A_{ij}(p) \cdot v).$$

Dann besitzt $\pi : E \to M$ die Struktur eines Vektorbündels vom Rang k, wobei $\{\chi_i\}_{i \in I}$ Trivialisierungen sind.

Beweis. Es sei die Familie $\{\Phi_i : E_{U_i} \to V_i \times \mathbb{R}^k\}_{i\in I}$ definiert als $\Phi_i := (\varphi_i^{-1}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}) \circ \chi_i$. Diese Familie genügt die Eigenschften 1,2,3 im Hilfsatz 3.24 und auch die Eigenschaften 4,5, wenn so $\mathcal{A}$ macht. Nach Hilfsatz 3.24 ist E eine glatte Mannigfaltigkeit. Die Abbildung π ist eine glatte Submersion, da $\varphi_i \circ \pi \circ \Phi_i^{-1}(q,v) = q$. Die Vektorraumstruktur auf den Fasern wird wie im Fall des Tangentialraums (siehe Formel 4.3) durch die Trivialisierungen χ_i definiert. Wenn $v_1 = \chi_i^{-1}(p,u_1)$ und $v_2 = \chi_i^{-1}(p,u_2)$, dann

$$0_p := \chi_i^{-1}(p,0), \qquad v_1 + v_2 := \chi_i^{-1}(p, u_1 + u_2), \qquad \lambda \cdot v_1 := \chi_i^{-1}(p, \lambda u_1), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Diese Definitionen hängen nicht von $i \in I$ ab, da nach Voraussetzung $\chi_j \circ \chi_i^{-1}(q,v)$ linear in v ist. □

Bemerkung 6.19. Wie der obige Beweis verdeutlicht, eine Familie von $\{\chi_i : E_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^k\}_{i\in I}$ wie oben zu haben, ist gleichbedeutend dazu, eine Familie $\{\Phi_i : E_{U_i} \to V_i \times \mathbb{R}^k\}_{i\in I}$ mit glatten Abbildungen $B_{ij} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to GL_k(\mathbb{R})$ für alle $i,j \in I$, sodass

$$\pi_1 \circ \Phi_i = \varphi_i \circ \pi, \qquad \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(q,v) = (\psi_{ij}(q), B_{ij}(q) \cdot v), \quad \psi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}, \quad \forall\, i,j \in I.$$

Wir haben dann die Relation $\chi_i = (\varphi_i, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}) \circ \Phi_i$ und $A_{ij} = B_{ij} \circ \varphi_i|_{U_i \cap U_j}$. △

Die Familie der Φ_i, die in diesem Abschnitt auftaucht, liefert einen Atlas für E. Wir können dann diese Familie weiter benutzen, um eine Trivialisierung für $\pi_{TE} : TE \to E$ über $\pi^{-1}(U_i)$ zu konstruieren:

$$\tilde{\chi}_i : TE_{\pi^{-1}(U_i)} \to \pi^{-1}(U_i) \times \mathbb{R}^{m+k}, \qquad \tilde{\chi}_i([\gamma]_\xi) = (\xi, \alpha_{\Phi_i,\xi}([\gamma]_\xi)) \tag{6.3}$$

Wenn $(q,v) := \Phi_i(\xi) \in V_i \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{m+k}$ und $\Psi_{ij} := \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$, sind die Übergangsfunktionen

$$\tilde{A}_{ij} : \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \to GL_{m+k}(\mathbb{R}), \qquad \tilde{A}_{ij}(\xi) = \mathrm{d}_{(q,v)}\Psi_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_q\psi_{ij}^{(1)} & 0 \\ (\mathrm{d}_q B_{ij}^{(1)}) \cdot v & B_{ij}(q) \end{pmatrix},$$

wobei wir $\mathrm{d}_{(q,v)}\Psi_{ij}^{(1)}$ als Blockmatrix bezüglich der Zerlegung $\mathbb{R}^{m+k} \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ geschrieben haben.

6.5 Homomorphismen von Vektorbündeln

Es fehlt uns noch glatte Abbildungen zwischen Vektorbündeln zu definieren, die die lineare Struktur erhalten.

Definition 6.20. Es seien $\pi_1 : E_1 \to M_1$ und $\pi_2 : E_2 \to M_2$ zwei Vektorbündel. Eine glatte Abbildung $F : E_1 \to E_2$ heißt Bündelhomomorphismus, wenn

1. eine glatte Abbildung $\bar{F} : M_1 \to M_2$ existiert, sodass $\pi_2 \circ F = \bar{F} \circ \pi_1$, nämlich F bildet Fasern auf Fasern ab, oder das folgende Diagramm kommutativ ist

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2; \arrow[d, "\pi_2"] \\ M_1 \arrow[r, "\bar{F}"] & M_2 \end{tikzcd}$$

2. die Einschränkung $F|_{(E_1)_p} : (E_1)_p \to (E_2)_p$ linear ist.

Wir sagen dann, dass F die Abbildung $\bar{F}$ hochhebt. Wenn ein Bündel-Homomorphimsus $G : E_2 \to E_1$ existiert, sodass $G \circ F = \mathrm{id}_{E_1}$ und $F \circ G = \mathrm{id}_{E_2}$, heißt F Bündel-Isomorphismus. $\triangle$

Beispiel 6.21. Wenn $F : M \to N$ eine glatte Abbildung ist, ist $\mathrm{d}F : TM \to TN$ ein Bündel-Homomorphismus. $\triangle$

Beispiel 6.22. Ein Vektorbündel E vom Rang k über M ist isomorph zu $M \times \mathbb{R}^k$ genau dann, wenn E trivial ist. $\triangle$

Bemerkung 6.23. Es sei $F : E_1 \to E_2$ ein Bündelhomomorphismus. Für jeden Punkt $p \in M_1$ existiert eine Trivialisierung $\chi_2 : (E_2)_{U_2} \to U_2 \times \mathbb{R}^{k_2}$ um $\bar{F}(p)$ und eine Trivialisierung $\chi_1 : 2 : (E_2)_{U_2} \to U_2 \times \mathbb{R}^{k_2}$ um p, sodass

$$\bar{F}(U_1) \subset U_2, \qquad \chi_2 \circ F \circ \chi_1^{-1}(p', v) = (\bar{F}(p'), A_F(p') \cdot v), \qquad \forall\, (p', v) \in U_1 \times \mathbb{R}^{k_1},$$

wobei $A_F : U_1 \to \mathrm{Mat}(k_2, k_1)$ glatt ist. Umgekehrt sei $\bar{F} : M_1 \to M_2$ glatt und $F : E_1 \to E_2$ eine Abbildung, für die für jeden $p \in M$ eine glatte Abbildung A_F wie oben existiert. Dann ist F ein Bündelhomomorphismus (siehe Aufgabeblatt 8). $\triangle$

Für Vektorbündel über die selbe Mannigfaltigkeit können wir die folgenden engeren Notion von Homomorphismus geben.

Definition 6.24. Es seien $\pi_1 : E_1 \to M$ und $\pi_2 : E_2 \to M$ zwei Vektorbündel. Ein Homomorphismus zwischen E_1 und E_2 *über* M ist ein Homomorphismus $F : E_1 \to E_2$ von Vektorbündeln, der die Identität hochhebt: $\pi_2 \circ F = \pi_1$. $\triangle$

Definition 6.25. Es sei $\bar{F} : M \to N$ eine glatt Abbildung und $E_1 \to M$ und $E_2 \to N$ Vektorbündel. Wir schreiben $\mathrm{Hom}_{\bar{F}}(E_1, E_2)$ für den Vektorraum der Bündelhomomorphismen von E_1 nach E_2, die $\bar{F}$ hochheben. Wenn $M = N$ und $\bar{F} = \mathrm{id}_M$ schreiben wir $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{id}_M}(E_1, E_2)$ für den Raum der Bündelhomomorphismen von E_1 nach E_2 über M. Wir schreiben $\mathrm{End}(E) := \mathrm{Hom}(E, E)$ für den Raum der Bündelendomorphismen von E. $\triangle$

6.6 Subbündel

Wir haben im Abschnitt 5.5 Untermannigfaltigkeiten definiert als die Teilmenge von M, die eine angepasste Karte um jeden Punkt zulassen, und zwar eine Karte, in der sie als der Schnitt zwischen einer offenen Mengen und einem affinen Untervektorraum aussehen. Wir können auf ähnlicher Weise nun Subbündel definieren.

Definition 6.26. Es sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel. Eine Teilmenge $E' \subset E$ heißt Subbündel vom Rang h von E, wenn für alle $p \in M$ eine lokale Trivialisierung $\chi : E_U \to U \times \mathbb{R}^k$ von E existiert, sodass $\chi(E' \cap E_U) = U \times (\mathbb{R}^h \times \{0\})$. Wir sagen, dass χ angepasst zu E' ist. Wir betrachten dazu die Einschränkung $\pi' : E' \to M$ von π. $\triangle$

Definition 6.27. Eine Distribution auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist ein Subbündel des Tangentialbündels $\pi : TM \to M$. △

Bemerkung 6.28. Es seien $\chi_1 : E_{U_1} \to U_1 \times \mathbb{R}^k$ und $\chi_2 : E_{U_2} \to U_2 \times \mathbb{R}^k$ zwei Trivialisierungen, die angepasst zu einem Subbündel $E' \subset E$ sind. Dann die Übergangsfunktion $A_{12}(p) \in GL_k(\mathbb{R})$ ist eine Blockmatrix bezüglich der Zerlegung $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^{k-h}$

$$A_{12}(p) = \begin{pmatrix} A'_{12}(p) & 0 \\ \star & \bar{A}_{12}(p), \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

wobei $A'_{12}(p) \in GL_h(\mathbb{R})$, $\bar{A}_{12}(p) \in GL_{k-h}(\mathbb{R})$ und $\star \in \mathrm{Mat}(k-h, h)$. △

Satz 6.29. *Es sei E' ein Subbündel vom Rang h von $\pi : E \to M$. Dann ist E' eine Untermannigfaltigkeit von E, $\pi' : E' \to M$ ein Vektorbündel vom Rang h und die Inklusion $\iota : E' \to E$ ein Bündelhomomorphismus über M. Wenn $A_{12} : U_1 \cap U_2 \to GL_k(\mathbb{R})$ die Übergangsfunktion zwischen zwei angepassten Trivialisierungen von E darstellt, dann ist $A'_{12} : U_1 \cap U_2 \to GL_h(\mathbb{R})$ (siehe (6.4)) eine Übergangsfunktion für die entsprechenden Trivialisierungen von E'.*

Proof. Wenn χ eine angepasste Trivialisierung über U ist und (U, φ) eine Karte für M ist, ist $(\varphi, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}) \circ \chi$ eine angepasste Karte für E' in E. Daher ist E' eine Untermannigfaltigkeit und es ist unmittelbar zu sehen, dass π' eine surjektive Submersion ist.

Wir definieren außerdem $\chi' : E'_U \to U' \times \mathbb{R}^h$ als $\chi' := (\mathrm{id}_U, \pi'_2) \circ \chi|_{E'_U}$, wobei $\pi'_2 : \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^{k-h} \to \mathbb{R}^h$ die Projektion ist. Man sieht nun leicht, dass χ' eine Trivialisierung für π' ist und dass die Übergangsfunktionen die gewünschte Gestalt besitzen. □

Beispiel 6.30 (Die vertikale Distribution)**.** Es sei $\pi : E \to M$ ein Bündel vom Rang k. Die vertikale Distribution von E ist das Subbündel $\mathcal{V}$ von TE vom Rang k, das folgendermaßen definiert wird. Es sei $\xi \in E$ und $p := \pi(\xi) \in M$. Die Faser E_p ist eine Untermannigfaltigkeit von E der Dimension k, da π eine Submersion ist. Wir setzen die vertikale Distribution an ξ als $\mathcal{V}_\xi := \mathrm{d}_\xi \iota(T_\xi E_{\pi(\xi)}) \subset T_\xi E$. Nach Satz 5.26 haben wir, dass

$$\mathcal{V}_\xi = \ker \mathrm{d}_\xi \pi.$$

Wir behaupten nun, dass $\tilde{\chi}$ definiert in (6.3) eine Trivialisierung von TE über $\pi^{-1}(U)$ liefert, die angepasste zu $\mathcal{V}$ ist. Es reicht dafür $\mathrm{d}_\xi \pi$ in den Koordinaten Φ und φ zu schreiben

$$\mathrm{d}_{(q,v)}(\varphi \circ \pi \circ \Phi^{-1})^{(1)} = \mathrm{d}_{(q,v)} \pi_1^{(1)}$$

Dann $\tilde{\chi}(\ker \mathrm{d}_\xi \pi) = \{p\} \times \ker(\mathrm{d}_{(q,v)} \pi_1^{(1)}) = \{p\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$. △

Wir geben nun ein Kriterium, um Subbündel zu erkennen.

Hilfsatz 6.31. *Es sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel und $E' \subset E$ eine Teilmenge. Dann E' ist ein Subbündel vom Rang h genau dann, wenn für alle $p \in M$ die folgende zwei Eigenschaften gelten:*

1. *$E' \cap E_p$ ist ein Untervektorraum der Dimension h von E_p;*

2. *es existiert eine Umgebung U von p und glatte Schnitte $\sigma_1, \dots, \sigma_h$ von π über U, die linear unabhängig für alle Punkte in U sind und die in $E' \cap E_U$ enthalten sind.*

Beweis. Es sei angenommen, dass E' ein Subbündel ist. Dann ist die erste Eigenschaft per Definition wahr. Es sei nun $\chi : E_U \to U \times \mathbb{R}^k$ eine Trivialisierung, sodass $\chi(E' \cap E_U) = U \times \mathbb{R}^h \times \{0\}$. Dann sind $\sigma_i(p) = \chi^{-1}(p, e_i)$ für $i = 1, \dots, h$ die gewünschte Schnitte.

Es sei umgekehrt E' mit den zwei obigen Eigenschaften gegeben. Es sei $p \in M$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert eine Trivialisierung $\chi : E_U \to U \times \mathbb{R}^k$ und glatte Schnitte $\sigma_1, \dots, \sigma_h$ von π über U, die linear unabhängig für alle Punkte in U sind und die in $E' \cap E_U$ enthalten sind. Es seien $v_1, \dots, v_h \in \mathbb{R}^k$, sodass $\chi(\sigma_i(p)) = (p, v_i)$. Wir wählen dann $u_{h+1}, \dots, u_k \in \mathbb{R}^k$, sodass $v_1, \dots, v_h, u_{h+1}, \dots, u_k$ eine Basis von $\mathbb{R}^k$. Wir setzen $\tau_i : U \to E_U$, $\tau_i(p) = \chi^{-1}(p, u_i)$. Dann $\sigma_1(p), \dots, \sigma_h(p), \tau_{h+1}(p), \dots, \tau_k(p)$ sind eine Basis von E_p. Nach Stetigkeit von χ sind dann $\sigma_1, \dots, \sigma_h, \tau_{h+1}, \dots, \tau_k$ ein Rahmen von π über einer kleineren Umgebung $U' \subset U$ von p. Wir wenden Hilfsatz 6.16 zu diesem Rahmen und bekommen die gewünschte Trivialisierung, die angepasste zu E' ist. $\square$

6.7 Das Pull-Back Bündel

Es sei $\pi : E \to N$ ein Vektorbündel. Wir möchten nun die Einschränkung von π auf eine Untermannigfaltigkeit $S \subset N$ definieren. Das sollte ein Bündel $\pi_S : E' \to S$ sein, wobei $E'_p = E_p$ für alle $p \in S$ gilt (insbesondere besitzen E und E' denselben Rang). Um die Definition präzis durchzuführen, betrachten wir den allgemeinen Fall, wobei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung von einer beliebigen Mannigfaltigkeit M ist. Wir wollen dann F benutzen, um das Bündel $\pi : E \to N$ auf ein Bündel $\mathcal{P}_F(\pi) : \mathcal{P}_F(E) \to M$ mit Hilfe von F zurückzuziehen. Die Idee der Konstruktion ist, dass die Faser von $\mathcal{P}_F(\pi)$ über p gleich die Faser von π über F bis auf einer kanonischen Bijektion sein sollte: $\mathcal{P}_F(E)_p \cong E_{F(p)}$. Der Fall von Untermannigfaltigkeiten folgt dann, wenn wir die Konstruktion mit der Inklusion $\iota : S \to N$ durchführen, da $\iota(p) = p$ für alle $p \in S$.

Wir definieren $\mathcal{P}_F(E) := \{(p, e) \in M \times E \mid F(p) = \pi(e)\}$. Wir haben zwei Abbildungen $\mathcal{P}_F(\pi) : \mathcal{P}_F(E) \to M$ und $\tilde{F} : \mathcal{P}_F(E) \to E$ als die Einschränkung auf $\mathcal{P}_F(E)$ der Projektionen $M \times E \to M$ und $M \times E \to E$. Wir haben das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_F(E) \arrow[r, "\tilde{F}"] \arrow[d, "\mathcal{P}_F(E)"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "F"] & N, \end{tikzcd}$$

sodass

$$\mathcal{P}_F(E)_p = \{p\} \times E_{F(p)}. \tag{6.5}$$

Also ist $E_{F(p)}$ in kanonischer Bijektion mit $\mathcal{P}_F(E)_p$ wie gewünscht.

Wir behaupten nun, dass $\mathcal{P}_F(\pi)$ ein Vektorbündel ist und $\tilde{F}$ ein Bündelhomomorphismus, der ein linearer Isomorphismus in jeder Faser ist. Es sei $(F^{-1}(U_N) \times E_{U_N}, \varphi_M \times \Phi_E)$ eine Produktkarte um $(p, e) \in \mathcal{P}_F(E)$. Dann ist

$$(\varphi_M \times \Phi_E)(\mathcal{P}_F(E) \cap (F^{-1}(U_N) \times E_{U_N})) = \{\varphi_N \circ \pi \circ \Phi_E^{-1}(x) - \varphi_N \circ F \circ \varphi_M^{-1}(y) = 0\},$$

wo (x, y) in $V_M \times V_N \times \mathbb{R}^k$ läuft. Man sieht, dass

$$(x, y) \mapsto \varphi_N \circ \pi \circ \Phi_E^{-1}(x) - \varphi_N \circ F \circ \varphi_M^{-1}(y)$$

eine Submersion ist. Daher ist $\mathcal{P}_F(E)$ eine Untermannigfaltigkeit von $M \times E$ und $\mathcal{P}_F(E)$ und $\tilde{F}$ sind glatt. Eine Trivialisierung von $\mathcal{P}_F(\pi)$ über $F^{-1}(U_N)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{P}_F(\chi) : \mathcal{P}_F(E)_{F^{-1}(U_N)} \to F^{-1}(U_N) \times \mathbb{R}^k, \quad \mathcal{P}_F(\chi)(p, e) = (p, \pi_2 \circ \chi(e)), \quad \pi_2 : U_N \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k.$$

Die Inverse ist gegeben durch $\mathcal{P}_F(\chi)^{-1}(p, v) = (p, \chi^{-1}(F(p), v))$ (warum?). Diese Abbildung ist glatt mit $N \times E$ als Zielmenge. Nach Satz 5.16 und 5.19 ist auch glatt mit $\mathcal{P}_F(E)$ als Zielmenge. Wenn $\chi' : E_{U'_N} \to U'_N \times \mathbb{R}^k$ eine weitere Trivialisierung von E ist und $A : U_N \cap U'_N \to GL_k(\mathbb{R})$ die Übergangsfunktion für E von χ nach χ' ist, dann ist

$$A \circ F : F^{-1}(U_N) \cap F^{-1}(U'_N) \to GL_k(\mathbb{R})$$

die Übergangsfunktion für $\mathcal{P}_F(E)$ von $\mathcal{P}_F(\chi)$ nach $\mathcal{P}_F(\chi')$.

Was sind die Schnitte des Pull-Back Bündels? Es sei $\sigma =: M \to M \times E$ eine glatte Abbildung mit Komponenten $\pi_1 \circ \sigma$ und $\pi_2 \circ \sigma$. Dann σ ist ein Schnitt von $\mathcal{P}_F(E)$ genau dann, wenn $\pi_1 \circ \sigma = \mathrm{id}_M$ und $\pi_2 \circ \sigma : M \to E$ die Eigenschaft $\pi_2 \circ \sigma(p) \in E_{F(p)}$ für alle $p \in M$ besitzt.

Satz 6.32. *Für alle glatten Abbildungen $F : M \to N$ glatt und Vektorbündel $\pi : E \to N$ haben besteht der lineare Isomorphismus*

$$\left\{\tau \in C^\infty(M, E) \;\middle|\; \tau(p) \in E_{F(p)},\ \forall\, p \in M\right\} \to \Gamma(\mathcal{P}_F(E)), \qquad \tau \mapsto (\mathrm{id}_M, \tau). \qquad \square$$

Wir werden oft die mit Gleichung (6.5) kompatible Identifizierung vom Satz 6.32 implizit benutzen und sprechen von einem Schnitt $\sigma : M \to E$ von $\Gamma(\mathcal{P}_F(E))$.

Beispiel 6.33. Es sei $\iota : S \to M$ eine Untermannigfaltigkeit. Wir definieren den Pull-Back des Tangentialbündel von M auf $\mathcal{P}_\iota(TM) \to S$. Zeigen Sie, dass es ein injektiver Homomorphismus $TS \to \mathcal{P}_\iota(TM)$ existiert, sodass TS als Subbündel von $\mathcal{P}_\iota(TM)$ betrachtet werden kann. $\triangle$

6.8 Algebraische Konstruktionen auf Vektorräumen

In der linearen Algebra kann man verschiedene algebraische Konstruktionen mit Vektorräume und ihren Homomorphismen durchführen. Wir besprechen hier die, die am wichtigsten für uns sein werden.

6.8.1 Duale

Der Dualraum von V ist der Raum V^* der linearen Funktionalen. Es gilt $\dim V^* = \dim V$. Wenn $F : V \to W$ linear, dann ist $F^* : W^* \to V^*$, $F^*(\psi) = \psi \circ F$ linear. Es gilt die funktoriale Eigenschaft

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*, \qquad (\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}.$$

Wir haben einen Isomorphismus $(V^*)^* \cong V$, sodass $(F^*)^* = F$. Wenn $e_1, \ldots, e_k$ eine Basis von V ist, existiert eindeutig eine duale Basis $e^1, \ldots, e^n$ mit der Eigenschaft

$$e^i(e_j) = \delta^i_j := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j; \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Wenn $F : V \to W$ durch eine Matrix A bezüglich Basen dargestellt wird, ist $F^* : W^* \to V^*$ durch die transponierte Matrix A^T dargestellt.

Bemerkung 6.34. Es sei $v \in V$ ein Vektor. Dann v ist eine lineare Kombination der Basis (e_i) und die Koeffizienten lassen sich durch die duale Basis schreiben:

$$v = \sum_{i=1}^{k} v^i e_i, \qquad v^i = e^i(v), \quad i = 1, \ldots, k. \qquad \triangle$$

6.8.2 Quotiente

Der Quotientenraum von V durch einen Untervektorraum W von V ist der Raum V/W der Äquivalenzklassen $\{v + W\}_{v \in V}$. Es gilt $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

Wenn $F : V_1 \to V_2$ mit $F(W_1) \subset W_2$ linear ist, dann ist $\bar{F} : V_1/W_1 \to V_2/W_2$ linear. Es gilt die funktoriale Eigenschaft

$$\overline{G \circ F} = \bar{G} \circ \bar{F}, \qquad \bar{\mathrm{id}}_V = \mathrm{id}_{V/W}.$$

Wenn $e_1, \ldots, e_h, e_{h+1}, \ldots, e_k$ eine Basis für V ist, wobei $e_1, \ldots, e_h$ eine Basis von W ist, ist dann $\bar{e}_{h+1}, \ldots, \bar{e}_k$ eine Basis für V/W. Wenn $F : V_1 \to V_2$ mit $F(W_1) \subset W_2$ durch eine Blockmatrix bezüglich $\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^{k-h}$

$$A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ \star & \bar{A} \end{pmatrix}$$

in den obigen Basen dargestellt wird, ist $\bar{F} : V_1/W_1 \to V_2/W_2$ durch die Matrix $\bar{A}$ dargestellt.

6.8.3 Direkte Summe

Die direkte Summe von V_1 und V_2 ist der Raum $V_1 \oplus V_2$ der Paaren $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ mit komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation.

Es gilt $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$. Wenn die zwei Abbildungen $F_1 : V_1 \to W_1$ und $F_2 : V_2 \to W_2$ linear sind, dann ist $F_1 \oplus F_2 : V_1 \oplus V_2 \to W_1 \oplus W_2$ linear. Es gilt die funktoriale Eigenschaft

$$(G_1 \circ F_1) \oplus (G_2 \circ F_2) = (G_1 \oplus G_2) \circ (F_1 \oplus F_2), \qquad \mathrm{id}_{V_1} \oplus \mathrm{id}_{V_2} = \mathrm{id}_{V_1 \oplus V_2}.$$

Wenn $e_1, \ldots, e_{k_1}$ und $f_1, \ldots, f_{k_2}$ Basen für die Räume V_1 und V_2 sind, sind die Vektoren $(e_1, 0), \ldots (e_{k_1}, 0), (0, f_1), \ldots (0, f_{k_2})$ eine Basis für $V_1 \oplus V_2$. Wenn $F_1 : V_1 \to W_1$ und $F_2 : V_2 \to W_2$ durch die Matrizen A_1 und A_2 in den obigen Basen dargestellt sind, ist $F_1 \oplus F_2$ durch die Blockmatrix

$$A_1 \oplus A_2 := \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

6.8.4 Tensorprodukt

Das Tensorprodukt zwischen V_1 und V_2 ist der Raum $V_1 \otimes V_2$ der Bilinearformen auf $V_1^* \times V_2^*$. Also wenn $w \in V_1 \otimes V_2$, dann ist $w : V_1^* \times V_2^* \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion in jedem Argument. Insbesondere ist $V \otimes \mathbb{R} \cong V$. Es gilt $\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim V_1 \cdot \dim V_2$. Wir haben eine kanonische Bilinearabbildung (oder Produkt)

$$\otimes : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2. \tag{6.7}$$

Wenn $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$, dann

$$v_1 \otimes v_2(\psi_1, \psi_2) = \psi_1(v_1) \cdot \psi_2(v_2), \qquad \forall\, (\psi_1, \psi_2) \in V_1^* \times V_2^*, \tag{6.8}$$

wobei wir auf der rechten Seite die Multiplikation zwischen reellen Zahlen haben. Insbesondere benutzen wir, dass der Zielvektorraum von v_1 und v_2 auch ein Algebra ist. Die Abbildung ist injektiv aber, wenn beide Räume Dimension höher als 1 besitzen, dann ist nicht surjektiv. Die Elemente seines Bildes heißen unzerlegbare Tensoren.

Aufgabe 6.35. Wenn $V_1 = V_2 =: V$ könnte man sich Fragen, ob $\otimes : V \times V \to V \otimes V$ symmetrisch ist. Zeigen Sie, dass wenn $\dim V > 1$ das nicht der Fall ist. △

Weiter können wir das Tensorprodukt von mehreren Räumen $V_1, \ldots, V_k$ betrachten. Das ist nun der Raum der Multilinearformen von $V_1^* \times \ldots \times V_k^*$ nach $\mathbb{R}$. Für drei Räumen haben wir Isomorphismen

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \tag{6.9}$$

und ähnliche Isomorphismen für mehrere Räumen gelten. Wir bekommen auch die multilineare Abbildung $\otimes : V_1 \times \ldots \times V_k \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$. Nach (6.9) ist diese Abbildung assoziativ,

$$(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 = v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3).$$

Definition 6.36. Es sei V ein Vektorraum und $k \in \mathbb{N}$. Der Vektorraum $V^{\otimes k}$ heißt der Raum der kontravarianten Tensoren von V der Stufe k, wobei $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$. Der Vektorraum $(V^*)^{\otimes k}$ heißt Raum der kovarianten Tensoren von V der Stufe k. Wir werden auch den Raum

$$V^{(h,k)} := (V^*)^{\otimes k} \otimes V^{\otimes h}$$

der Tensoren von V, kontravariant der Stufe h und kovariant der Stufe k (man sagt auch einfach Tensoren vom Typ (h,k)) betrachten. △

Wenn $F_1 : V_1 \to W_1$ und $F_2 : V_2 \to W_2$ lineare Abbildungen sind, ist die lineare Abbildung $F_1 \otimes F_2 : V_1 \otimes V_2 \in W_1 \otimes W_2$ gegeben als

$$(F_1 \otimes F_2)(w)(\psi_1, \psi_2) = w(F_1^* \psi_1, F_2^* \psi_2), \quad \forall\, w \in V_1 \otimes V_2, \quad \forall\, (\psi_1, \psi_2) \in W_1^* \times W_2^*. \tag{6.10}$$

Es gilt die funktoriale Eigenschaft

$$(G_1 \circ F_1) \otimes (G_2 \circ F_2) = (G_1 \otimes G_2) \circ (F_1 \otimes F_2), \qquad \mathrm{id}_{V_1} \otimes \mathrm{id}_{V_2} = \mathrm{id}_{V_1 \otimes V_2}.$$

Außerdem erhalten die lineare Abbildungen das Produkt:

$$(F_1 \otimes F_2) \cdot (v_1 \otimes v_2) = (F_1 \cdot v_1) \otimes (F_2 \cdot v_2), \qquad \forall\, (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2.$$

Wenn $(e_i)_{i=1,\ldots h}$ und $(f_j)_{j=1,\ldots,k}$ Basen von V_1 und V_2 sind, ist $(e_i \otimes f_j)_{i=1,\ldots,h}^{j=1,\ldots,k}$ eine Basis von $V_1 \otimes V_2$, die wir anordnen als

$$e_1 \otimes f_1,\ e_1 \otimes f_2, \ldots, e_1 \otimes f_k,\ e_2 \otimes f_1,\ e_2 \otimes f_2, \ldots, e_h \otimes f_{k-1},\ e_h \otimes f_k.$$

Wenn $F_1 : V_1 \to W_1$ und $F_2 : V_2 \to W_2$ durch Matrizen A_1 und A_2 dargestellt sind, ist $F_1 \otimes F_2 : V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$ durch die Matrix der Kronecker-Multiplikation $A_1 \otimes A_2$ in den Basen $e_i \otimes f_j$ und $e'_l \otimes f'_m$ dargestellt, wobei $(A_1 \otimes A_2)_{ij}^{lm} = (A_1)_i^l \cdot (A_2)_j^m$, wobei wir auf der rechten Seite die Multiplikation zwischen reellen Zahlen haben. Also wenn A_1 eine $h_1 \times k_1$ Matrix und A_2 eine $h_2 \times k_2$ Matrix ist, ist $A_1 \otimes A_2$ eine $(h_1 h_2) \cdot (k_1 k_2)$ Matrix.

Aufgabe 6.37. Es sei (a) eine 1×1 Matrix und A eine beliebige Matrix. Zeigen Sie, dass

$$(a) \otimes A = a \cdot A.$$

Berechnen Sie $A_1 \otimes A_2$, wobei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$ △

Einen Schritt weiter kann man die Multilinearabbildungen von $V_1^* \times \ldots, V_k^*$ mit Werten in einem Vektorraum W betrachten. Die sind dann zu $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k \otimes W$ isomorph. Wenn wir eine multilineare Abbildung $\mu : V_1^* \times \ldots \times V_k^* \to W$ haben, dann bekommen wir eine Multilinearform $\mu' : V_1^* \times \ldots \times V_k^* \times W^* \to \mathbb{R}$, indem wir

$$\mu'(\psi_1, \ldots, \psi_k, \psi) = \psi\Big(\mu(\psi_1, \ldots, \psi_k)\Big)$$

setzen. Nach Definition ist $\mu' \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_k \otimes W$.

Bemerkung 6.38. Im Allgemeinen können wir nicht zwei Multilinearabbildungen mit Werten in W multiplizieren und somit eine Multilinearabbildung mit Werten in W bekommen. Wenn wir das Produkt $\otimes$ von (6.7) und (6.8) benutzen würden, würden wir eine Multilinearabbildung mit Werten in $W \otimes W$ finden. $\triangle$

Ein wichtiges Beispiel dieser Konstruktion ist, wenn $k = 1$ und $V_1 = V^*$. Dann bekommen wir einen Isomorphismus $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$.

Aufgabe 6.39. Zeigen Sie, dass die unzerlegbare Tensoren in $V^* \otimes W$ den linearen Abbildungen vom Rang 1 entsprechen. $\triangle$

Wenn $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$ durch die Matrix A dargestellt ist, dann ist

$$F = \sum_{i,j} a_i^j e^i \otimes f_j,$$

wobei $\{e_i\}$ und $\{f_j\}$ Basis von V und W sind. Wenn $V = W$ können wir das lineare Funktional $C : V^* \otimes V \to \mathbb{R}$, das zu jedem F die Spur von F zuordnet.

Aufgabe 6.40. Zeigen Sie, dass $C(\psi \otimes v) = \psi(v)$ für alle $\psi \otimes v \in V^* \otimes V$. $\triangle$

Wir können nun C benutzen, um eine Familie von Kontraktionen auf dem Tensorraum $V^{(h,k)}$ von h Kopien von V und k Kopien von V^* zu definieren.

Definition 6.41. Für $h' = 1, \ldots, h$ und $k' = 1, \ldots, k$ definieren wir die (h', k')-Kontraktion

$$C_{k'}^{h'} : V^{(h,k)} \to V^{(h-1,k-1)}$$

als die Verkettung von

$$V^{(h,k)} \overset{s_{h',k'}}{\to} (V^* \otimes V) \otimes V^{(h-1,k-1)} \xrightarrow{C \otimes \mathrm{id}} \mathbb{R} \otimes V^{(h-1,k-1)} \cong V^{(h-1,k-1)},$$

wobei $s_{h',k'}$ die eindeutige lineare Abbildung ist, die die folgende Formel für unzerlegbaren Tensoren $v = \otimes_{i=1}^h v_i$, $\alpha = \otimes_{j=1}^k \alpha^j$ besitzt:

$$s_{h',k'}\Big(\alpha \otimes v\Big) = \alpha^{k'}(v_{h'}) \cdot \hat{\alpha} \otimes \hat{v}, \qquad \text{mit} \quad \hat{v} = \otimes_{\substack{i=1 \\ i \neq h'}}^h v_i, \quad \hat{\alpha} = \otimes_{\substack{j=1 \\ j \neq k'}}^k \alpha^j.$$

Also

$$C_{k'}^{h'}\Big(\alpha \otimes v\Big) = \alpha^{k'}(v_{h'}) \cdot \hat{\alpha} \otimes \hat{v}.$$

$\triangle$

Bemerkung 6.42. Die Abbildung $s_{h',k'}$, und daher auch $C_{k'}^{h'}$, hängt von der Wahl der Indizes h' und k' ab. $\triangle$

Definition 6.43. Die Einsatzung von einem Vektor $v \in V$ ist die lineare Abbildung

$$\iota_v : V^{(h,k)} \to V^{(h,k-1)}, \qquad \iota_v w = C_1^1(v \otimes w).$$

Für $h = 0$ können wir diese Definition umschreiben als

$$\iota_v w(v_1, \ldots, v_{k-1}) = w(v, v_1, \ldots, v_{k-1}), \qquad \forall\, v_1, \ldots, v_{k-1} \in V.$$

$\triangle$

6.8.5 Symmetrische und antisymmetrische Tensore

In diesem Abschnitt definieren wir (anti)symmetrische kontravariante Tensoren. Die Diskussion von kovarianten Tensoren ist ähnlich und wird nicht betrachtet hier.

Es sei $\mathfrak{S}_k$ die symmetrische Gruppe, also die Gruppe der Permutationen von k Elementen. Wir schreiben mit $\varepsilon : \mathfrak{S}_k \to \{-1, 1\}$ den Gruppenhomomorphismus, der jeder Permutation ihr Vorzeichen zuordnet. Wir haben eine lineare rechte Wirkung $\mathfrak{S}_k \times V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}$, $(\sigma, w) \to w^\sigma$ gegeben durch die Vertauschung der Elementen, die wir der Multilinearform w geben:

$$w^\sigma(\psi_1, \dots, \psi_k) := w(\psi_{\sigma(1)}, \dots, \psi_{\sigma(k)}), \qquad \forall\, (\psi_1, \dots, \psi_k) \in (V^*)^{\otimes k}.$$

Wir definieren die symmetrischen kontravarianten Tensoren der Stufe k als die Tensoren, die durch die Wirkung erhalten bleiben:

$$w^\sigma = w, \qquad \forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_k.$$

Diese Tensoren bilden einen Untervektorraum $\mathcal{S}^k V$ der Dimension $\binom{n+k-1}{k}$ und $\mathcal{S}^1 V = V$.

Wir haben eine Projektion

$$\Pi_{\mathcal{S}} : V^{\otimes k} \to \mathcal{S}^k V, \qquad \Pi_{\mathcal{S}}(w) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} w^\sigma$$

auf $\mathcal{S}^k V$. Das heißt, dass $\mathcal{S}^k V = \{w \mid \Pi_{\mathcal{S}}(w) = w\}$.

Es sei nun $\otimes : V^{\otimes h} \times V^{\otimes k} \to V^{\otimes (h+k)}$ das Produkt, das in (6.7) und (6.8) eingeführt wurde. Es ist offenbar, dass wenn $w_1 \in \mathcal{S}^h V$ und $w_2 \in \mathcal{S}^k V$ dann $w_1 \otimes w_2$ nicht immer in $\mathcal{S}^{h+k} V$ liegt, wenn $\dim V > 1$. Zum Beispiel für $k_1 = k_2 = 1$ und $w_1 = e_1$ und $w_2 = e_2$ zwei Vektoren einer Basis gilt:

$$e_1 \otimes e_2(e^1, e^2) = 1 \neq 0 = e_2 \otimes e_1(e^1, e^2).$$

Um ein Produkt innerhalb der symmetrischen Tensoren zu bekommen, benutzen wir dann die Projektion:

$$\odot : \mathcal{S}^h V \times \mathcal{S}^k V \to \mathcal{S}^{h+k} V, \qquad w_1 \odot w_2 := \Pi_{\mathcal{S}^{h+k}}(w_1 \otimes w_2).$$

Hilfsatz 6.44. *Das symmetrische Produkt $\odot$ ist assoziativ und kommutativ.*

Bemerkung 6.45. Wenn (e_i) eine Basis für V ist, ist $(e_{i_1} \odot \dots \odot e_{i_k})$ eine Basis für $\mathcal{S}^k V$, wobei $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_k \leq k$. △

Als letzte Eigenschaft bemerken wir, dass lineare Abbildungen $F : V \to W$ die symmetrischen Tensoren erhalten, nämlich $F^{\otimes k}(\mathcal{S}^k V) \to \mathcal{S}^k W$, und kompatibel mit dem symmetrischen Produkt sind:

$$F^{\otimes (h+k)} \cdot (w_1 \odot w_2) = (F^{\otimes h} \cdot w_1) \odot (F^{\otimes k} \cdot w_2), \qquad \forall\, (w_1, w_2) \in \mathcal{S}^h V \times \mathcal{S}^k V.$$

Wir definieren nun die antisymmetrischen kontravarianten Tensoren der Stufe k als die Tensoren, die durch die Wirkung das Vorzeichen der Permutation bekommen:

$$w^\sigma = \varepsilon(\sigma) w, \qquad \forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_k.$$

Diese Tensoren bilden einen Untervektorraum $\Lambda^k V$ der Dimension $\binom{n}{k}$. Insbesondere ist $\Lambda^1 V = V$, $\Lambda^{\dim V} V \cong \mathbb{R}$ (aber der Isomorphismus nicht kanonisch ist) und $\Lambda^k V = 0$ für $k > \dim V$. Wir haben eine Projektion

$$\Pi_\Lambda : V^{\otimes k} \to \Lambda^k V, \qquad \Pi_\Lambda(w) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) w^\sigma$$

auf $\Lambda^k V$. Das heißt, dass $\Lambda^k V = \{w \mid \Pi_{\Lambda^k}(w) = w\}$. Wir definieren das alternierende Produkt als

$$\wedge : \Lambda^h V \times \Lambda^k V \to \Lambda^{h+k} V, \qquad w_1 \wedge w_2 := \frac{(h+k)!}{h!k!} \cdot \Pi_{\Lambda^{h+k}}(w_1 \otimes w_2).$$

Hilfsatz 6.46. *Das antisymmetrische Produkt $\odot$ ist assoziativ und antikommutativ. Die Antikommutativität heißt*

$$w_1 \wedge w_2 = (-1)^{hk} w_2 \wedge w_1, \qquad \forall\, w_1 \in \Lambda^h V,\ w_2 \in \Lambda^k V.$$

Bemerkung 6.47. Wenn $(e_i)_{i=1,\dots,k}$ eine Basis für V ist, ist $(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k})$ eine Basis für $\Lambda^k V$, wobei $1 \le i_1 < i_2 < i_k \le k$. Insbesondere ist $e_1 \wedge \ldots \wedge e_k$ eine Basis von $\Lambda^k V \cong \mathbb{R}$. △

Aufgabe 6.48. Zeigen Sie, dass für alle $w_1, w_2 \in V$:

$$w_1 \odot w_2 = \frac{1}{2}(w_1 \otimes w_2 + w_2 \otimes w_1), \qquad w_1 \wedge w_2 = w_1 \otimes w_2 - w_2 \otimes w_1.$$ △

Aufgabe 6.49. Es sei w von Stufe k mit k ungerade. Zeigen Sie, dass $w \wedge w = 0$. Schließen Sie daraus, dass, wenn $v_1, \dots, v_k \in V$, dann $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = 0$ genau dann, wenn $v_1, \dots, v_k$ linear abhängig sind. △

Als letzte Eigenschaft bemerken wir, dass lineare Abbildungen $F : V \to W$ die antisymmetrischen Tensoren erhalten, nämlich $F^{\otimes k}(\Lambda^k V) \to \Lambda^k W$, und kompatibel mit dem antisymmetrischen Produkt sind:

$$F^{\otimes(h+k)} \cdot (w_1 \wedge w_2) = (F^{\otimes h} \cdot w_1) \wedge (F^{\otimes k} \cdot w_2), \qquad \forall\, (w_1, w_2) \in \Lambda^h V \times \Lambda^k V.$$

Wenn $F : V \to V$, dann

$$F^{\otimes \dim V} : \Lambda^{\dim V} V \to \Lambda^{\dim V} V, \qquad F^{\otimes \dim V} \cdot w = (\det F) \cdot w, \qquad \forall\, w \in \Lambda^{\dim V} V \cong \mathbb{R}.$$

Zum Schluß dieses Abschnitts über symmetrische und antisymmetrische Tensoren, wollen wir noch zwei Bemerkungen machen. Erstens kann die obige Diskussion zum Fall $V^{\otimes k} \otimes W$ der Multilinearformen auf $V^* \times \ldots \times V^*$ mit Werten in W angepasst werden. Wir können nämlich $\mathcal{S}^k V \otimes W$ und $\Lambda^k V \otimes W$ als die (anti)symmetrische Multilinearformen mit Werten in W definieren. Die kompatibilität mit linearen Abbildungen gilt noch, aber man kann keine (anti)symmetrisches Produkt definieren (siehe Bemerkung 6.38).

Zweitens kann die Wirkung der Produktgruppe $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_h$ auf dem Raum $V^{(h,k)}$ der Tensoren vom Typ (h,k) betrachten. Dort hat man . Es ist dann interessant Tensoren in $V^{(h,k)}$ zu studieren, die (anti)symmetrisch nur bezüglich einer Untergruppe G von $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_h$ sind. Zum Beispiel ist $\mathcal{S}^3 V^* \otimes (V^*)^{\otimes 2} \otimes \mathcal{S}^2 V \otimes \Lambda^4 V \subset (V^*)^{\otimes 4} \otimes V^{\otimes 6}$ ein Untervektorraum der Dimension $\binom{n+1}{2}\binom{n}{4}\binom{n+2}{3}n$, dessen Elementen symmetrisch in den ersten 4 Vektoren, antisymmetrisch in den letzen 2 Vektoren und symmetrisch in den ersten 3 Kovektoren sind.

6.9 Entsprechende Konstruktionen auf Vektorbündeln

Wir können nun die obigen Konstruktionen faserweise auf Vektorbündeln übernehmen, um neuen Vektorbündel zu bekommen. Die neuen Trivialisierungen sind dann mit den alten durch Postkomposition mit Standardabbildungen im euklidischen Raum verbunden. Auf ähnlicher Weise sind die neuen Übergangsfunktionen durch die funktorielle Eigenschaft von den alten gewonnen. Wir betrachen hier nur das Beispiel des Dualraums und des Tensorprodukts.

6.9.1 Duale

Es sei $\pi_E : E \to M$ ein Vektorbündel. Wir definieren

$$E^* := \bigsqcup_{p \in M} E_p^*, \qquad \pi_{E^*} : E^* \to M, \quad \text{wobei} \quad \pi_{E^*}^{-1}(p) = E_p^*, \quad \forall\, p \in M.$$

Wir wollen nun Satz 6.18 verwenden, um die Struktur eines Vektorbündels der Abbildung π_{E^*} zu geben. Wir fangen an, Trivialisierungen $\{\chi_i : E_{U_i} :\to U_i \times \mathbb{R}^k\}$ zu betrachten. Wir schreiben $\chi_i(e) = (\pi_E(e), \xi_i(\pi(e)) \cdot e)$, wobei $\xi_i(p) : E_p \to \mathbb{R}^k$ für alle $p \in U_i$ ein linearer Isomorphismus ist. Wir haben den dualen Isomorphismus $\xi_i(p)^* : (\mathbb{R}^k)^* \to E_p^*$ und seine Inverse $(\xi_i(p)^*)^{-1} : E_p^* \to (\mathbb{R}^k)^*$. Wir setzen

$$\chi_i^* : E_{U_i}^* \to U_i \times \mathbb{R}^k, \qquad \chi_i^*(e^*) := \Big(\pi_{E^*}(e^*), \delta \cdot \big(\xi_i(\pi_{E^*}(e^*))^*\big)^{-1} \cdot e^*\Big), \quad \forall\, e^* \in E_{U_i}^*$$

wobei $\delta : (\mathbb{R}^k)^* \to \mathbb{R}^k$ den Isomorphismus darstellt, der die duale Basis der Standardbasis auf die Standardbasis abbildet. Die Abbildungen χ_i^* genügen den Voraussetzungen vom Satz 6.18, da

$$\chi_j^* \circ (\chi_i^*)^{-1}(p,v) = \chi_j^*\Big(p, \xi_i(p)^* \cdot \delta^{-1} \cdot v\Big) = \Big(p, \delta \cdot (\xi_j(p)^*)^{-1} \cdot \xi_i(p)^* \cdot \delta^{-1} \cdot v\Big).$$

Wir haben $(\xi_j(p)^*)^{-1} = (\xi_j(p)^{-1})^*$. Daher

$$\delta \cdot (\xi_j(p)^*)^{-1} \cdot \xi_i(p)^* \cdot \delta^{-1} = \delta \cdot (\xi_j(p)^{-1})^* \cdot \xi_i(p)^* \cdot \delta^{-1} = \delta \cdot \big(\xi_i(p) \cdot \xi_j(p)^{-1}\big)^* \cdot \delta^{-1}$$

Wir benutzen nun, dass

$$\chi_i(p) \circ \chi_j^{-1}(p) = (\chi_j(p) \cdot \chi_i^{-1}(p))^{-1} = A_{ij}(p)^{-1},$$

wobei A_{ij} die Übergangsfunktion von χ_i und χ_j ist und wir die lineare Abbildung $v \mapsto A_{ij} \cdot v$ mit der Matrix identifizieren. Durch diese Identifizierung haben wir schließlich

$$\chi_j^* \circ (\chi_i^*)^{-1}(p, v) = (p, A_{ij}(p)^{-T} \cdot v), \tag{6.11}$$

da, wenn $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ linear und durch eine Matrix A dargestellt wird, dann wird $\delta \cdot L \cdot \delta^{-1}$ durch die transponierte Matrix A^T dargestellt. Da die Abbildung $A \mapsto A^{-T}$ ein Diffeomorphismus von $GL_k(\mathbb{R})$ in sich selbst ist, sehen wir, dass $A_{ij}^{-T} : U_i \cap U_j \to GL_k(\mathbb{R})$ glatt ist. Wir können nun Satz 6.18 anwenden. Es ist dann leicht zu sehen, dass die Vektorraumstruktur auf E_p^*, die dieser Satz liefert, mit dem kanonischen Vektorraumstruktur auf E_p^* als Dual von E_p übereinstimmt.

Folgerung 6.50. *Für alle Vektorbündel $\pi_E : E \to M$ ist die Abbildung $\pi_{E^*} : E^* \to M$ ein Vektorbündel vom selben Rang.* $\square$

Es sei nun $F : E_1 \to E_2$ ein Homomorphismus von Vektorbündeln über M gegeben (hier wird es wichtig sein, dass F die Identität hochhebt). Wir haben also das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi_{E_1}"'] & & E_2. \arrow[dl, "\pi_{E_2}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Wir definieren $F^* : E_2^* \to E_1^*$, sodass sie auf jeder Faser die duale Abbildung von F ist:

$$(i) \quad F^*((E_2)_p^*) = (E_1)_p^*, \qquad (ii) \quad F^*|_{(E_2)_p^*} : (E_2)_p^* \to (E_1)_p^*, \quad e \mapsto F_p^* \cdot e, \quad \forall\, e \in (E_2)_p^*.$$

Wir haben also das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} E_2^* \arrow[rr, "F^*"] \arrow[dr, "\pi_{E_2^*}"'] & & E_1^*. \arrow[dl, "\pi_{E_1^*}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Wir wollen zeigen, dass F^* ein Bündelhomomorphismus ist. Es fehlt zu diesem Zweck nur die Glattheit zu prüfen. Es sei $\{U_i\}$ eine trivialisierende Überdeckung für E_1 und E_2 mit Trivialisierungen $\chi_i^1 : (E_1)_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^{k_1}$ und $\chi_i^2 : (E_1)_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^{k_2}$. Da F ein Bündelhomomorphismus ist, wissen wir, dass

$$\chi_i^2 \circ F \circ (\chi_i^1)^{-1}(p, v) = (p, F_i(p) \cdot v)$$

für eine glatte $F_i : U_i \to \mathrm{Mat}(k_2, k_1)$ gilt (siehe Bemerkung 6.23). Eine Rechnung, die sehr ähnlich ist, wie die, die (6.11) geliefert hat, zeigt

$$(\chi_i^1)^* \circ F^* \circ ((\chi_i^2)^*)^{-1}(p, v) = (p, F_i(p)^T \cdot v).$$

Deshalb ist auch $F_i^T : U_i \to \mathrm{Mat}(k_1, k_2)$ glatt, wie gewünscht.

Folgerung 6.51. *Für alle Bündelhomomorphismen $F : E_1 \to E_2$ über M ist die Abbildung $F^* : E_2^* \to E_1^*$ ein Bündelhomomorphismus über M. Wir haben dazu die funktorialen Eigenschaften*

$$\mathrm{id}_E^* = \mathrm{id}_{E^*}, \qquad (G \circ F)^* = F^* \circ G^*,$$

wobei $G : E_2 \to E_3$ ein weiterer Bündelhomomorphismus ist. □

Aufgabe 6.52. Zeigen Sie, dass ein Bündelhomomorphismus $F : E_1 \to E_2$ über M genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $F^* : E_2^* \to E_1^*$ ein Bündelisomorphismus ist. △

Bemerkung 6.53. Es sei $(e_1, \dots, e_k)$ ein Rahmen für E über U mit assoziierter Trivialisierung $\chi : E_U \to U \times \mathbb{R}^k$. Die Elemente $(e^1, \dots, e^k)$, die in jedem Punkt von U die duale Basis von $(e_1, \dots, e_k)$ sind, bilden einen Rahmen für E^* über U. Wenn $e \in E_U$ beliebig ist, können wir den dualen Rahmen benutzen, um die Koeffizienten von e in der Basis $(e_1, \dots, e_k)$ und daher $\chi(e)$ zu finden (siehe Bemerkung 6.34):

$$\chi(e) = \Big(\pi(e), \big(e^1(e), \dots, e^k(e)\big)\Big). \qquad \triangle$$

6.9.2 Quotiente

Es sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel und $\pi' : E' \to M$ ein Subbündel von π. Wir definieren

$$E/E' := \bigsqcup_{p \in M} E_p/E'_p, \qquad \bar{\pi} : E/E' \to M, \quad \text{wobei} \quad \bar{\pi}^{-1}(p) = E_p/E'_p, \quad \forall\, p \in M.$$

Wir verwenden Satz 6.18, um der Abbildung $\bar{\pi}$ die Struktur eines Vektorbündels zu geben. Wir fangen an, angepasste Trivialisierungen $\{\chi_i : E_{U_i} :\to U_i \times \mathbb{R}^k\}$ zu betrachten, sodass

$$\chi_i(E'_{U_i}) = U_i \times \mathbb{R}^h,$$

wobei $\mathbb{R}^h \subset \mathbb{R}^k$. Wir schreiben $\chi_i(e) = (\pi_E(e), \xi_i(\pi(e)) \cdot e)$ und betrachten den Quotientenisomorphismus $\tilde{\xi}_i(p) : \mathbb{R}^k/\mathbb{R}^h \to E_p/E'_p$. Wir setzen

$$\bar{\chi}_i : (E/E')_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^{k-h}, \qquad \bar{\chi}_i(\bar{e}) := \Big(\bar{\pi}(\bar{e}), \delta \cdot \tilde{\xi}_i(\bar{\pi}(\bar{e})) \cdot \bar{e}\Big), \quad \forall\, \bar{e} \in (E/E')_{U_i}$$

wobei $\delta : \mathbb{R}^k/\mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^{k-h}$ der Isomorphismus darstellt, der $e_i + \mathbb{R}^h$ auf e_i für $i = h+1, \dots, k$ abbildet. Die Abbildungen χ_i^* genügen den Voraussetzungen vom Satz 6.18, da

$$\bar{\chi}_j \circ \bar{\chi}_i^{-1}(p, v) = (p, \bar{A}_{ij}(p) \cdot v), \qquad \forall\, (p, v) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^{k-h},$$

wobei $\bar{A}_{ij} : U_i \cap U_j \to GL_{k-h}(\mathbb{R})$ durch (6.4) gegeben ist. Schließlich ist es leicht zu sehen, dass die Vektorraumstruktur auf E_p/E'_p, die Satz 6.18 liefert, mit dem kanonischen Vektorraumstruktur auf E_p/E'_p als Quotient von E_p durch E'_p übereinstimmt.

Folgerung 6.54. *Für alle Sübbundel $E' \subset E$ ist die Abbildung $\bar{\pi} : E/E' \to M$ ein Vektorbündel vom Rang der Differenz der Ränge.* □

Wir beschreiben die Eigenschaften des Quotienten von einem Bündelhomomorphismus ohne Beweis.

Folgerung 6.55. *Es seien $E_1' \subset E_1$ und $E_2' \subset E_2$ zwei Subbündel, wobei E_1 und E_2 Bündel über M_1 und M_2 sind. Für alle Bündelhomomorphismen $F : E_1 \to E_2$ mit $F(E_1') \subset F(E_2')$ ist die Quotientenabbildung $\bar{F} : E_1/E_1' \to E_2/E_2'$ ein Bündelhomomorphismus. Wir haben dazu die funktorialen Eigenschaften*

$$\bar{\mathrm{id}}_{E_1} = \mathrm{id}_{E_1/E_1'}, \qquad \overline{G \circ F} = \bar{G} \circ \bar{F},$$

wobei $E_3' \subset E_3$ ein weiterer Subbündel und $G : E_2 \to E_3$ ein weiterer Bündelhomomorphismus mit $G(E_2') \subset E_3'$ sind. □

Beispiel 6.56. Es sei $\iota : M \to N$ eine Untermannigfaltigkeit, wobei ι die Inklusion bezeichnet. Das Normalenbündel $\mathcal{N}_N M$ von M in N ist das Quotientenbündel

$$\mathcal{N}_N M := \mathcal{P}_\iota(TN)/TM,$$

wobei $\mathcal{P}_\iota(TN)$ das Pullback-Bündel von TN ist und TM wird mit seinem Bild durch $\mathrm{d}\iota : TM \to TN$ identifiziert. △

Aufgabe 6.57. Beschreiben Sie, wie aus einem Rahmen von E, der angepasst zu E' ist, einen Rahmen von E/E' gewonnen werden kann. △

Aufgabe 6.58. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine glatte Abbildung und $c \in \mathbb{R}^k$ gegeben. Wir setzen $M := f^{-1}(c)$. Es sei angenommen, dass f eine Submersion bei allen $p \in M$ ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n} M$ trivial ist. *Hinweis: Betrachten Sie die Zeilen der Jacobi-Matrix von f.* △

6.9.3 Direkte Summe

Es seien $\pi_1 : E_1 \to M$ und $\pi_2 : E_2 \to M$ zwei Vektorbündel. Wir definieren

$$E_1 \oplus E_2 := \bigsqcup_{p \in M} (E_1)_p \oplus (E_2)_p, \qquad \pi_\oplus : E_1 \oplus E_2 \to M$$

mit dem üblichen Rezept. Wir verwenden Satz 6.18, um die Struktur eines Vektorbündels der Abbildung $\pi_\oplus$ zu geben. Wir fangen an, Trivialisierungen $\{\chi_i^1 : (E_1)_{U_i} :\to U_i \times \mathbb{R}^{k_1}\}$ und $\{\chi_i^2 : (E_2)_{U_i} :\to U_i \times \mathbb{R}^{k_2}\}$ zu betrachten. Wir schreiben $\chi_i^1(e_1) = (\pi_1(e_1), \xi_i^1(\pi_1(e_1)) \cdot e_1)$ und ähnlich für χ_i^2. Wir setzen $\chi_i^\oplus : (E_1 \oplus E_2)_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^{k_1+k_2}$,

$$\chi_i^\oplus(e_\oplus) := \Big(\pi_\oplus(e_\oplus), \delta \cdot \big(\xi_i^1(\pi_\oplus(e_\oplus)) \oplus \xi_i^2(\pi_\oplus(e_\oplus))\big) \cdot e_\oplus\Big), \quad \forall\, e_\oplus \in (E_1 \oplus E_2)_{U_i},$$

wobei $\delta : \mathbb{R}^{k_1} \oplus \mathbb{R}^{k_2} \to \mathbb{R}^{k_1+k_2}$ der kanonische Isomorphismus ist. Die Abbildungen $\chi_i^\oplus$ genügen den Voraussetzungen vom Satz 6.18, da

$$\chi_j^\oplus \circ (\chi_i^\oplus)^{-1}(p, v) = (p, A_{ij}^\oplus(p) \cdot v), \qquad \forall\, (p, v) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^{k_1+k_2},$$

wobei $A_{ij}^\oplus(p) = A_{ij}^1(p) \oplus A_{ij}^2(p)$ und A_{ij}^1, A_{ij}^2 die Übergangsfunktionen von E_1 und E_2 sind. Es ist leicht zu sehen, dass die Vektorraumstruktur auf $(E_1)_p \oplus (E_2)_p$, die Satz 6.18 liefert, mit dem kanonischen Vektorraumstruktur auf $(E_1)_p \oplus (E_2)_p$ als direkte Summe von $(E_1)_p$ und $(E_2)_p$ übereinstimmt.

Folgerung 6.59. *Für alle Vektorbündel $\pi_1 : E_1 \to M$ und $\pi_2 : E_2 \to M$ ist die Abbildung $\pi_\oplus : E_1 \oplus E_2 \to M$ ein Vektorbündel vom Rang der Summe der Ränge.* □

Aufgabe 6.60. Beschreiben Sie, wie aus Rahmen von E_1 und E_2 einen Rahmen von $E_1 \oplus E_2$ gewonnen werden kann. △

Aufgabe 6.61. Formulieren Sie die Eigenschaften einer direkten Summe von Bündelhomomorphismen. △

Aufgabe 6.62. Es seien M_1 und M_2 glatte Mannigfaltigkeiten und schreiben Sie $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ mit $i = 1, 2$ für die Projektionen. Es seien $\pi_i^*(TM_i) \to M_1 \times M_2$ die Pullback-Bündel von $TM_i \to M_i$ über $M_1 \times M_2$ bezüglich der Projektionen. Zeigen Sie, dass

$$T(M_1 \times M_2) = \pi_1^*(TM_1) \oplus \pi_2^*(TM_2).$$

△

Aufgabe 6.63. Es seien E_1 und E_2 zwei Subbündel von E, sodass $(E_1)_p \cap (E_2)_p = \{0_p\}$ für alle $p \in M$. Zeigen Sie, dass $E_1 + E_2 := \bigsqcup_{p\in M} (E_1)_p + (E_2)_p$ ein Subbündel von E ist, das isomorph zu $E_1 \oplus E_2$ ist. △

Wir können die direkte Summe von Vektorbündeln benutzen, um multilineare Abbildungen zwischen Bündeln zu definieren. Diese werden eine bedeutende Rolle für die Untersuchung der Geometrie der Mannigfaltigkeiten spielen.

Definition 6.64. Es seien $E_1, \ldots, E_h$ Vektorbündel über M und E Vektorbündel über N. Eine glatte Abbildung $F : E_1 \oplus \ldots \oplus E_h \to E$ ist eine multilineare Abbildung, wenn eine glatte Abbildung $\bar{F} : M \to N$ existiert, sodass

$$F\Big((E_1)_p \times \ldots \times (E_h)_p\Big) \subset E_{\bar{F}(p)}$$

und die Einschränkung $F_p : (E_1)_p \times \ldots \times (E_h)_p \to E_{\bar{F}(p)}$ multilinear ist. Wenn $M = N$ und $\bar{F} = \mathrm{id}_M$ ist, sagen wir, dass F eine multilineare Abbildung über M ist. Wir schreiben $\mathrm{Mult}_{\bar{F}}(E_1, \ldots, E_h; E)$ für den Raum der multilinearen Abbildungen F, die $\bar{F}$ hochheben, und $\mathrm{Mult}(E_1, \ldots, E_h; E) := \mathrm{Mult}_{\mathrm{id}_M}(E_1, \ldots, E_h; E)$ für die multilinearen Abbildung über M. △

Bemerkung 6.65. Für $h = 1$ in der obigen Definition bekommen wir den Begriff vom Bündelhomomorphismus in Definition 6.25 zurück. Also $\mathrm{Mult}_{\bar{F}}(E_1; E) = \mathrm{Hom}_{\bar{F}}(E_1, E)$. △

6.9.4 Tensorprodukt

Die Konstruktion des Tensorproduktes $\pi_\otimes : E_1 \otimes E_2 \to M$ zwei Vektorbündel $\pi_1 : E_1 \to M$ und $\pi_2 : E_2 \to M$ folgt das gleiche Schema wie die direkte Summe. Hier bemerken wir nur, dass

$$\chi_i^\otimes(e_\otimes) := \Big(\pi_\otimes(e_\otimes), \delta \cdot \big(\xi_i^1(\pi_\otimes(e_\otimes)) \otimes \xi_i^2(\pi_\otimes(e_\otimes))\big) \cdot e_\otimes\Big), \quad \forall\, e_\otimes \in (E_1 \otimes E_2)_{U_i},$$

wobei $\delta : \mathbb{R}^{k_1} \otimes \mathbb{R}^{k_2} \to \mathbb{R}^{k_1 \cdot k_2}$ der Isomorphismus ist, der $e_i \otimes e_j$ auf $e_{(i-1)k_2+j}$ abbildet für alle $i = 1, \ldots, k_1$ und $j = 1, \ldots, k_2$. Die Übergangsfunktionen sind durch das Kroneckerprodukt von Matrizen gegeben und zwar

$$A^{\otimes}_{ij}(p) = A^1_{ij}(p) \otimes A^2_{ij}(p), \qquad \forall\, p \in U_i \cap U_j.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Vektorraumstruktur auf $(E_1)_p \otimes (E_2)_p$, die Satz 6.18 liefert, mit dem kanonischen Vektorraumstruktur auf $(E_1)_p \otimes (E_2)_p$ als Tensorprodukt zwischen $(E_1)_p$ und $(E_2)_p$ übereinstimmt.

Folgerung 6.66. *Für alle Vektorbündel $\pi_1 : E_1 \to M$ und $\pi_2 : E_2 \to M$ ist die Abbildung $\pi_\otimes : E_1 \otimes E_2 \to M$ ein Vektorbündel vom Rang des Produktes der Ränge.* □

Aufgabe 6.67. Beschreiben Sie, wie aus Rahmen von E_1 und E_2 einen Rahmen von $E_1 \otimes E_2$ gewonnen werden kann. △

Aufgabe 6.68. Formulieren Sie die Eigenschaften eines Tensorprodukts von Bündelhomomorphismen. △

Für alle $h, k \in N$ definieren wir das Bündel

$$E^{(h,k)} := (E^*)^{\otimes k} \otimes E^{\otimes h}.$$

Für alle $h' = 1, \ldots, h$ und $k' = 1, \ldots, k$ liefert die faserweise (h', k')-Kontraktion

$$C^{h'}_{k'} : E^{(h,k)} \to E^{(h-1,k-1)}$$

einen Bündelhomomorphismus.

6.9.5 Symmetrische und antisymmetrische Tensoren

Es sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel. Wir definieren

$$\mathcal{S}^h E := \bigsqcup_{p \in M} \mathcal{S}^h E_p, \qquad \pi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}^h E \to M$$

und

$$\Lambda^h E := \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^h E_p, \qquad \pi_\Lambda : \Lambda^h E \to M$$

wie üblich. Die folgende Aussage sollte nicht überraschend sein.

Folgerung 6.69. *Für alle Vektorbündel $\pi : E \to M$ sind $\mathcal{S}^h E$ und $\Lambda^h E$ Subbündel von $E^{\otimes h}$ vom Rang $\binom{k+h-1}{h}$, beziehungsweise $\binom{k}{h}$, wobei k der Rang von E ist. Die Symmetrisierung und die Antisymmetrisierung*

$$\Pi_{\mathcal{S}} : E^{\otimes h} \to \mathcal{S}^h E, \qquad \Pi_\Lambda : E^{\otimes h} \to \Lambda^h E$$

liefern Bündelhomomorphismen. □

Aufgabe 6.70. Beschreiben Sie, wie aus einem Rahmen von E einen Rahmen von $\mathcal{S}^h E$ und $\Lambda^h E$ gewonnen werden kann. △

6.10 Der Raum der glatten Schnitte eines Vektorbündels

Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass viele wichtige Objekte der Riemannschen Geometrie als glatte Schnitte von Vektorbündeln verstanden werden können: die Geschwindigkeit einer Kurve, die Riemannsche Metrik, die Krümmung. Gleichzeitig werden Operation auf glatten Schnitten auch eine entscheidende Bedeutung haben: die Kovariante Ableitung und das äußere Differential, zum Beispiel. In diesem Abschnitt wollen wir daher die Struktur des Raums der glatten Schnitten und der Abbildungen, die diese Struktur erhalten, besser verstehen. Die Existenz von glatten Funktionen mit kompaktem Träger wird ein wesentlicher Bestandteil der Theorie sein.

Definition 6.71. Es sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel. Wir bezeichnen mit $\Gamma(E)$ die Menge der glatten Schnitte von π. Der Nullschnitt $0_E \in \Gamma(E)$ ist die Abbildung $0_E : M \to E$, sodass $0_E(p)$ der Nullvektor von E_p für alle $p \in M$ ist. Wir definieren den Träger von $\sigma \in \Gamma(E)$ als

$$T(\sigma) := \overline{\{p \in M \mid \sigma(p) \neq 0_E(p)\}} \subset M. \qquad \triangle$$

Beispiel 6.72. Der Raum der glatten Schnitten des trivialen Bündels $M \times \mathbb{R}^k$ gibt uns die glatten Abbildungen mit Werten in $\mathbb{R}^k$ zurück:

$$C^\infty(M, \mathbb{R}^k) \xrightarrow{\sim} \Gamma(M \times \mathbb{R}^k), \qquad f \mapsto \mathrm{Graph}_f : M \to M \times \mathbb{R}^k. \qquad \triangle$$

Aufgabe 6.73. Es sei

$$T_n := \left\{ (x, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, v \in \mathbb{R} \cdot x \right\}$$

das tautologische Vektorbündel vom Rang 1. Zeigen Sie, dass

$$\Gamma((T_n^*)^{\otimes k}) \xrightarrow{\sim} \left\{ f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \text{ glatt} \,\middle|\, f(\lambda x) = \lambda^k f(x), \ \forall\, (\lambda, x) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \right\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die glatte Abbildung $G : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to T_n^{\otimes k}$ gegeben durch $G(x) = (\pi(x), x^{\otimes k})$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, wobei $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ die Quotientabbildung ist. Jede $F \in \Gamma((T_n^*)^{\otimes k})$ kann als Bündelhomomorphismus $F : T_n^{\otimes k} \to \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}$ gesehen werden. Es existiert dann eine eindeutige glatte Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, sodass das folgende Diagramm kommutativ ist

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, "(\pi, f)"] & \\ T_n^{\otimes k} \arrow[r, "F"] & \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ für alle (λ, x). Es sei umgekehrt f glatt mit dieser Eigenschaft. Finden Sie einen Bündelhomomorphismus F, der das obige Diagramm kommutativ macht. Insbesondere liefert jedes reelle homogene Polynom vom Grad k in $n + 1$ Variablen einen Schnitt von $(T_n^*)^{\otimes k}$. $\triangle$

Die folgende Charakterisierung von glatten Schnitten wird im Aufgabeblatt 8 bewiesen.

Hilfsatz 6.74. *Es sei* $\{\chi_i : E_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^k\}$ *Trivialisierungen von einem Vektorbündel* $\pi : E \to M$*, sodass* $\{U_i\}$ *eine Überdeckung von* M *ist. Es sei* $\sigma : M \to E$ *ein Schnitt von* E *und* $\sigma_i : U_i \to \mathbb{R}^k$ *gegeben durch* $\pi_2 \circ \chi_i \circ \sigma$*, wobei* $\pi_2 : U_i \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$*. Dann* σ *ist glatt genau dann, wenn alle* σ_i *glatt sind.* □

Satz 6.75. *Die Menge* $\Gamma(E)$ *ist ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum mit Nullelement* O_E *bezüglich der faserweise Addition und der Skalarmultiplikation. Außerdem liefert die faserweise Multiplikation zwischen glatten Funktionen auf* M *und glatten Schnitten von* E *die Struktur eines* $C^\infty(M)$*-Moduls auf* $\Gamma(E)$ *und zwar*

$$f \in C^\infty(M), \quad \sigma \in \Gamma(E), \quad \Longrightarrow \quad f\sigma \in \Gamma(E), \quad (f\sigma)(p) := f(p) \cdot \sigma(p), \quad \forall\, p \in M.$$

Schließlich wenn U *offen in* M *ist,* $f \in C^\infty(M)$ *mit Träger in* U *und* $\sigma \in \Gamma(E_U)$*, dann* $f\sigma$ *lässt eine Erweiterung auf* $\Gamma(E)$ *mit Träger in* U *zu. Es folgt, dass für alle* $p \in U$ *und alle* $e \in E_p$ *ein* $\sigma \in \Gamma(E)$ *mit* $\sigma(p) = e$ *und* $T(\sigma) \subset U$ *existiert.* □

Beweis. Die Wohldefinitheit der Struktur von Vektorraum und $C^\infty(M)$-Modul folgt aus Hilfsatz 6.74, aus dem klar ist, dass die Summe von glatten Schnitten und die Multiplikation zwischen einer glatten Funktion und einem glatten Schnitt wieder einen glatten Schnitt geben. Nach Hilfsatz 3.32.(iii) folgt auch die Aussage über die Multiplikation zwischen $\sigma \in \Gamma(E_U)$ und $f \in C^\infty(M)$ mit Träger in U. Für die letzten Aussage sei $e \in E_p$ und $\chi : E_U \to U \times \mathbb{R}^k$ eine Trivialisierung um p. Dann ist $(p, v) := \chi(e)$. Wir setzen $\sigma'(p') := \chi^{-1}(p', v)$ für alle $p' \in U$. Dann $\sigma'(p) = e$ und $\sigma' \in \Gamma(E_U)$. Die gewünschte σ ist dann $\sigma := f\sigma'$, wobei $f \in C^\infty(M)$ mit Träger in U und $f(p) = 1$. □

Wir sehen nun, dass multilineare Abbildungen

$$F : E_1 \oplus \ldots \oplus E_h \to E$$

über M, die in Definition 6.64 beschrieben wurden, als Schnitte des Vektorbündels $E_1^* \otimes \ldots \otimes E_h^* \otimes E$ betrachtet werden können. Für alle $p \in M$ haben wir die multilineare Abbildung $F_p : (E_1)_p \times \ldots \times (E_h)_p \to E_p$, sodass $F_p \in (E_1)_p^* \otimes \ldots (E_h)_p^* \otimes E_p$. Wenn wir Hilfsatz 6.74 verwenden, sehen wir, dass F ein glatter Schnitt von $E_1^* \otimes \ldots \otimes E_h^* \otimes E$ ist. Umgekehrt liefert jeder glatte Schnitt von $E_1^* \otimes \ldots, \otimes E_h^* \otimes E$ eine multilineare Abbildung über M. Wir haben also das folgende Resultat gezeigt.

Folgerung 6.76. *Es seien* $E_1, \ldots, E_h$ *und* E *Vektorbündel über* M*. Der Raum der multilinearen Abbildungen über* M *auf* $E_1, \ldots, E_h$ *mit Werten in* E *(siehe Definition* 6.64*) ist isomorph als* $C^\infty(M)$*-Modul zum Raum der Schnitten von* $E_1^* \otimes \ldots, \otimes E_h^* \otimes E$*:*

$$\Gamma(E_1^* \otimes \ldots, \otimes E_h^* \otimes E) \cong \mathrm{Mult}(E_1, \ldots, E_h; E).$$

Insbesondere gilt $\Gamma(E_1^* \otimes E) \cong \mathrm{Hom}(E_1, E)$. □

Wir können nun eine multilineare Abbildung $F : E_1 \oplus \ldots \oplus E_h \to E$ verwenden, um eine entsprechende multilineare Abbildung zwischen den Räumen der Schnitte zu definieren:

$$\mathcal{F}_F : \Gamma(E_1) \times \ldots \times \Gamma(E_h) \to \Gamma(E), \qquad \mathcal{F}_F(\sigma_1, \ldots, \sigma_h)(p) = F_p(\sigma_1(p), \ldots, \sigma_h(p))$$

für alle $\sigma_i \in \Gamma(E_i)$ mit $i = 1, \ldots, h$ und $p \in M$. Mit Hilfe von 6.74 ist $\mathcal{F}_F(\sigma_1, \ldots, \sigma_h)$ glatt und somit $\mathcal{F}_F$ wohldefiniert. Außerdem ist die Abbildung $\mathcal{F}_F$ $C^\infty(M)$-multilinear. Die Linearität in dem ersten Argument folgt zum Beispiel aus:

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{F}_F(f\sigma_1, \ldots, \sigma_h)\big)(p) = F_p\Big((f\sigma_1)(p), \ldots, \sigma_h(p)\Big) &= F_p\Big(f(p)\sigma_1(p), \ldots, \sigma_h(p)\Big)\\ &= f(p)F_p\Big(\sigma_1(p), \ldots, \sigma_h(p)\Big)\\ &= f(p)\big(\mathcal{F}_F(\sigma_1, \ldots, \sigma_h)(p)\big)\\ &= (f\mathcal{F}_F(\sigma_1, \ldots, \sigma_h))(p)\end{aligned}$$

für alle $f \in C^\infty(M)$.

Definition 6.77. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Mult}(\Gamma(E_1), \ldots, \Gamma(E_h); \Gamma(E))$ das $C^\infty(M)$-Modul der $C^\infty(M)$-multilinearen Abbildungen $\mathcal{G} : \Gamma(E_1) \times \ldots \Gamma(E_h) \to \Gamma(E)$. △

Wir zeigen nun, dass alle die Elementen von $\mathrm{Mult}(\Gamma(E_1), \ldots, \Gamma(E_h); \Gamma(E))$ durch multilineare Abbildungen von Vektorbündeln entstehen.

Satz 6.78. *Die Abbildung*

$$\Gamma(E_1^* \otimes \ldots \otimes E_h^* \otimes E) \to \mathrm{Mult}(\Gamma(E_1), \ldots, \Gamma(E_h); \Gamma(E)), \quad F \mapsto \mathcal{F}_F$$

ist ein Isomorphismus von $C^\infty(M)$-Modulen.

Beweis. Wir beweisen hier nur den Fall $h = 1$. Der allgemeine Fall folgt auf ähnlicher Weise. Es sei dann $\mathcal{G} : \Gamma(E_1) \to \Gamma(E)$ eine $C^\infty(M)$-lineare Abbildung. Wir wollen einen Bündelhomomorphismus $F : E_1 \to E_2$ finden, sodass $\mathcal{F}_F = \mathcal{G}$. Für $p \in M$ und $e \in (E_1)_p$ setzen wir

$$F(e) := \mathcal{G}(\sigma)(p), \qquad \sigma \in \Gamma(E_1), \quad \sigma(p) = e$$

wobei σ nach Hilfsatz 6.74 existiert. Wir behaupten nun, dass F wohldefiniert ist (also die rechte Seite hängt nicht von σ ab) und dass F glatt ist. Wenn das gewährleistet kann, folgt automatisch, dass $F_p : (E_1)_p \to E_p$ linear für alle $p \in M$ und $\mathcal{F}_F = \mathcal{G}$ ist. Wir werden die gewünschten Eigenschaften in verschieden Schritten beweisen.

Schritt 1: Es sei $p \in M$ und $\sigma, \sigma' \in \Gamma(E_1)$, sodass $\sigma = \sigma'$ in einer Umgebung U von p. Dann $\mathcal{G}(\sigma)(p) = \mathcal{G}(\sigma')(p)$. Es sei dafür $f \in C^\infty(M)$ eine Funktion mit Träger in U und $f(p) = 1$. Dann, $f(\sigma - \sigma') = 0_{E_1}$. Daher gilt

$$0_{E_1}(p) = \mathcal{G}(0_{E_1})(p) = \mathcal{G}(f(\sigma - \sigma'))(p) = f(p)\mathcal{G}(\sigma - \sigma')(p) = \mathcal{G}(\sigma)(p) - \mathcal{G}(\sigma')(p).$$

Schritt 2: Es sei nun $e_1, \ldots e_k$ ein Rahmen für E_1 in einer Umgebung U von p_0. Wir nehmen eine Umgebung $U' \subset U$, sodass $\bar{U}' \subset U$ und $\bar{U}'$ kompakt. Nach Hilfsatz 3.60

existiert $g' \in C^\infty(M)$ mit Träger in U, sodass $g'|_{U'} = 1$. Wir setzen $\tilde{e}_i := g' e_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$, die nach Hilfsatz 6.74 Elemente von $\Gamma(E_1)$ sind. Wir bezeichnen dann für alle $i = 1, \ldots, k$

$$\sigma_i := \mathcal{G}(\tilde{e}_i) \in \Gamma(E).$$

Es sei weiter U'' eine Umgebung von p_0, sodass $\bar{U}'' \subset U'$ und sei $g'' \in C^\infty(M)$ mit Träger in U' und $g''|_{U''} = 1$. Insbesondere gilt $g'' = g'' g'$.

Schritt 3: Es sei nun $p \in U''$ und $e \in (E_1)_p$. Wir haben $v \in \mathbb{R}^k$, sodass

$$e = \sum_{i=1}^{k} v_i e_i(p).$$

Wir nehmen $\sigma \in \Gamma(E_1)$ beliebig, sodass $\sigma(p) = e$. Da $e_1, \ldots, e_k$ ein Rahmen auf U' sind, existieren $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(U')$, sodass

$$\sigma = \sum_{i=1}^{k} f_i e_i, \qquad f_i(p) = v_i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Da $\sigma = g''\sigma$ auf U'' haben wir nach Schritt 1:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\sigma)(p) = \mathcal{G}(g''\sigma)(p) = \mathcal{G}(g''g'\sigma)(p) = \mathcal{G}\Big((g''g')\sum_{i=1}^{k} f_i e_i\Big)(p) &= \mathcal{G}\Big(\sum_{i=1}^{k}(g''f_i)(g'e_i)\Big)(p) \\ &= \sum_{i=1}^{k}(g''f_i)(p)\mathcal{G}(\tilde{e}_i)(p) \\ &= \sum_{i=1}^{k} v_i \cdot \sigma_i(p).\end{aligned}$$

Der letzte Term hängt nicht von der Wahl von σ. Also F ist wohldefiniert.

Schritt 4: Wir behaupten nun, dass F auf der Umgebung U'' von p_0 glatt ist. Es sei $\chi : E_{U''} \to U'' \times \mathbb{R}^k$ die Trivialisierung bezüglich der Rahmen $e_1, \ldots, e_k$ (siehe Hilfsatz 6.16). Nach Schritt 3 gilt

$$F \circ \chi_i^{-1}(p, v) = \sum_{i=1}^{k} v_i \cdot \sigma_i(p), \quad \forall (p, v) \in U'' \times \mathbb{R}^k,$$

die glatt ist, da die σ_i glatt sind (warum gilt diese Implikation?). Da p_0 beliebig ist, folgt es, dass F glatt auf M ist. □

Bemerkung 6.79. Dank des Satzes 6.78 werden wir Elementen von $\Gamma(E_1^* \otimes \ldots, \otimes E_h^* \otimes E) \cong \mathrm{Mult}(E_1, \ldots, E_h; E)$ mit Elementen von $\mathrm{Mult}(\Gamma(E_1), \ldots, \Gamma(E_h); \Gamma(E))$ in diesem Skript stets identifizieren und das Symbol σ statt $\mathcal{F}_\sigma$ benutzen. Wenn wir eine $\mathbb{R}$-multilineare Abbildung $\mathcal{F} : \Gamma(E_1) \times \ldots \Gamma(E_h) \to \Gamma(E)$ betrachten, wird es dann wichtig sein zu bestimmen, ob sie $C^\infty(M)$-multilinear ist, um zu verstehen, entweder sie aus einem Element von $\Gamma(E_1^* \otimes \ldots, \otimes E_h^* \otimes E)$ nach Satz 6.78 kommt oder nicht. △

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer Operation auf Schnitten in dem speziellen Fall von Pullback-Bündeln. Wir haben im Abschnitt 6.7 gezeigt, dass wir Abbildungen $F : M \to N$ benutzen können, um Vektorbündel über N auf Vektorbündel über N zurückzuziehen. Wir zeigen nun, dass auch die Schnitte zurückgezogen werden können.

Satz 6.80. *Es sei $\pi : E \to N$ ein Vektorbündel, $F : M \to N$ eine glatte Abbildung und $\mathcal{P}_F(\pi) : \mathcal{P}_F(E) \to M$ das Pullback-Bündel. Mithilfe der Identifizierung aus Satz* 6.32 *ist die Abbildung*

$$\circ F : \Gamma(E) \to \Gamma(\mathcal{P}_F(E)), \qquad \sigma \mapsto \sigma \circ F, \qquad \forall\, \sigma \in \Gamma(E)$$

ein wohldefinierter linearer Homomorphismus. Wenn $e_1, \ldots e_h$ ein Rahmen für E auf U mit Trivialisierung χ ist, dann ist $e_1 \circ F, \ldots, e_h \circ F$ ein Rahmen für $\mathcal{P}_F(E)$ auf $F^{-1}(U)$ mit Trivialisierung $\mathcal{P}_F(\chi)$.

Beweis. Für alle $\sigma \in \Gamma(E)$ und alle $q \in N$ gilt $\sigma(q) \in E_q$. Daher gilt für alle $p \in M$, dass $\sigma \circ F(p) = \sigma(F(p)) \in E_{F(p)}$. □

7 Tensoren auf Mannigfaltigkeiten

Wir wollen nun die Operationen auf Vektorbündeln über M im letzten Abschnitt genauer für den Fall $E = TM$ anschauen.

Definition 7.1. Das Kotangentialbündel $\pi : T^*M \to M$ ist das Duale vom Tangentialbündel $\pi : TM \to M$. Die Faser T_p^*M über $p \in M$ heißt Kotangentialraum an p und ihre Elemente heißen kotangentiale Vektoren (oder Kovektoren). Ein Element von $\Omega^1(M) := \Gamma(T^*M)$ heißt 1-Form. △

Wir haben gesehen, dass der Tangentialraum an p als Raum der Derivationen interpretiert werden kann. Das heißt, dass jeder Tangentialvektor ein lineares Funktional des Raums von Keimen von glatten Funktionen bei p liefert. Das bedeutet dann, dass der Keim einer glatten Funktion als lineares Funktional des Tangentialraums gesehen werden kann nach dem allgemeinen Prinzip, dass sich jeder Vektorraum H mit einem Unterraum seines Biduals $(H^*)^*$ identifizieren lässt.

Auf dieser Weise können wir 1-Formen aus glatten Funktionen konstruieren. Für alle $f \in C^\infty(M)$ und alle $p \in U$ haben wir nämlich die lineare Abbildung $\mathrm{d}_p f : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. Das heißt, dass $\mathrm{d}_p f \in T_p^*M$ für alle $p \in U$ und wir können $\mathrm{d}f : M \to T^*M$ als Schnitt von T^*M betrachten. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{d}f$ glatt ist. Zu diesem Zweck nehmen wir eine Karte $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^m))$ um p. Wir haben den Rahmen $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{i=1}^m$ von TU. Das gibt uns eine Trivialisierung $\chi : TU \to U \times \mathbb{R}^m$. Nach Abschnitt 6.9.1 bekommen wir eine Trivialisierung $\chi^* : T^*U \to U \times \mathbb{R}^m$ von T^*U. Laut Bemerkung 6.53 ist $\chi^* \circ \mathrm{d}f(p) = (p, v(\mathrm{d}_p f))$ für ein Element $v(\mathrm{d}_p f) \in \mathbb{R}^m$ mit Koordinaten

$$v_i(\mathrm{d}_p f) = \mathrm{d}_p f\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big), \quad i = 1, \ldots m.$$

Wir berechnen nun die Koordinaten. Laut der Definition ist $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p = [\varphi^{-1} \circ \gamma_{q,e_j}]$, wobei $\gamma_{q,e_i}(0) = q$ und $\dot\gamma_{q,e_i}(0) = e_i$. Dann

$$\mathrm{d}_p f\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(f \circ \varphi^{-1} \circ \gamma_{q,e_i}) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(q).$$

Da f eine glatte Funktion ist, ist die rechte Seite eine glatte Funktion von p. Daher ist $\mathrm{d}f$ glatt.

Aus der obigen Rechnung gewinnen wir eine weitere Auskunft umsonst. Wenn $f = x^j$, die j-te Koordinate von φ, ist, dann

$$v_i(\mathrm{d}_p x^j) = \frac{\partial(x^j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(q) = \delta_i^j$$

wobei δ_i^j die Kronecker-Delta ist. Also sehen wir, dass $(\mathrm{d}_p x^j)_{j=1}^m$ die Dualbasis von $\big(\frac{\partial}{\partial x^i}\big)_{i=1}^m$ und dass wir die Koeffizientendarstellung

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \cdot \mathrm{d}x^i$$

auf U haben.

Bemerkung 7.2. Wenn wir die Beschreibung von T_pM als Raum der Derivationen von Keimen benutzen, können wir $\mathrm{d}_p f$ als

$$\mathrm{d}_p f(v) = v\big([f]_p\big), \qquad \forall\, v \in T_pM$$

ausdrücken, wobei $[f]_p$ den zu f assoziierten Keim bezeichnet (also $[f]_p$ ist die Äquivalenzklasse von f). Das folgt aus Bemerkung 4.20. $\triangle$

Bemerkung 7.3. Nicht jede 1-Form $\alpha \in \Omega^1(M)$ ist das Differential einer Funktion. Wir nehmen zum Beispiel $\alpha = x\mathrm{d}y$ auf $\mathbb{R}^2$. Wenn $\alpha = \mathrm{d}f$ wäre, hätten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x.$$

Nach dem Satz von Schwarz bekommen wir den Widerspruch:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 1. \qquad \triangle$$

Man kann nun TM und T^*M benutzen, um Tensoren von beliebigen Typ zu definieren.

Definition 7.4. Ein Tensor vom Typ (h,k) ist ein Element vom Tensorbündel

$$T^{(h,k)}M = (T^*M)^{\otimes k} \otimes (TM)^{\otimes h}.$$

Wir nennen die Schnitte $\sigma \in \Gamma(T^{(h,k)}M)$ Tensorfelder. Die Elemente von $T^{(h,0)}M = (TM)^{\otimes h}$ heißen kontravariante Tensoren der Stufe h und die Elemente von $T^{(0,k)}M = (T^*M)^{\otimes k}$ heißen kovariante Tensoren der Stufe k.

Man kann dementsprechend symmetrische und antisymmetrische kovariante und kontravariante Tensoren definieren. Für die Integration und die Geometrie auf Mannigfaltigkeiten werden die Vektorbündel $\mathcal{S}^k(M) := \mathcal{S}^k(T^*M)$ der symmetrischen kovarianten Tensore der Stufe k und die Vektorbündel $\Lambda^k(M) := \Lambda^k(T^*M)$ der antisymmetrischen kovarianten Tensore der Stufe k von Bedeutung sein. Es wird üblich die Notation $\Omega^k(M) := \Gamma(\Lambda^k(M))$ benutzt. Die Tensorfelder in $\Omega^k(M)$ heißen k-Formen. △

Bemerkung 7.5. Nach Definition gilt $(TM)^{\otimes 0} = M \times \mathbb{R} = (T^*M)^{\otimes 0}$. Außerdem gilt $\Lambda^0 M = M \times \mathbb{R} = \mathcal{S}^0 M$ und $\Lambda^1 M = T^*M = \mathcal{S}^1 M$. △

Bemerkung 7.6. Nach Aufgabe 6.67 liefert eine Karte (U, φ) von M einen Rahmen (und somit eine Trivialisierung) von $T^{(h,k)}M$ über U, dessen Elemente

$$\mathrm{d}x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_h}}, \qquad i_1, \ldots, i_h, j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, m\}.$$

sind. Auf ähnlicher Weise ist

$$\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k}, \qquad 1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq m$$

ein Rahmen von $\Lambda^k M$ über U. △

Es sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung. Wir wollen nun verstehen, wie F auf den Räumen von Tensorfeldern operiert. Die Antwort hängt davon ab, ob wir kovariante oder kontravariante Tensoren betrachten.

7.1 Pull-Back von kovarianten Tensoren durch Abbildungen

Definition 7.7. Es sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung. Für alle $k \in \mathbb{N}$ definieren wir den Pullback Operator $F^* : \Gamma((T^*N)^{\otimes k}) \to \Gamma((T^*M)^{\otimes k})$ als

$$(F^*\sigma)_p(v_1, \ldots, v_k) := \sigma_{F(p)}(\mathrm{d}_p F \cdot v_1, \ldots, \mathrm{d}_p F \cdot v_k), \qquad \forall\, p \in M, \ \ \forall\, v_1, \ldots, v_k \in T_p M$$

für alle $\sigma \in \Gamma((T^*N)^{\otimes k})$. △

Zu zeigen, dass diese eine gute Definition ist, müssen wir beweisen, dass wenn σ glatt ist, dann ist $F^*\sigma$ auch glatt. Es sei dafür eine Karte $(U_N, \varphi_N = (y^1, \ldots, y^n))$ von $F(p)$ und $(U_M, \varphi_M = (x^1, \ldots, x^m)))$ eine Karte von $p \in M$, sodass $F(U_M) \subset U_N$. Wir setzen $\psi := \varphi_N \circ F \circ \varphi_M^{-1}$. Wir haben

$$\sigma_{p'} = \sum_{j_1, \ldots, j_k} \sigma_{j_1, \cdots, j_k}(p') \mathrm{d}y^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}y^{j_k},$$

wobei die Funktionen $p' \mapsto \sigma_{j_1,\dots,j_k}(p')$ glatt auf U_N sind. Wir haben auch

$$(F^*\sigma)_p = \sum_{i_1,\dots,i_k} (F^*\sigma)_{i_1,\dots,i_k}(p) \mathrm{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_k}$$

und wir müssen zeigen, dass $p \mapsto (F^*\sigma)_{i_1,\dots,i_k}(p)$ glatt auf U_M sind. Wir berechnen diese Funktionen mit Hilfe von Bemerkung 6.53

$$\begin{aligned}
(F^*\sigma)_{i_1,\dots,i_k}(p) &= (F^*\sigma)_p\Big(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\Big) \\
&= \sigma_{F(p)}\Big(\mathrm{d}_pF \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \mathrm{d}_pF \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\Big) \\
&= \sum_{j_1,\dots,j_k} \sigma_{F(p)}\Big(\frac{\partial \psi^{j_1}}{\partial x^{i_1}}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial y^{j_1}}, \cdots, \frac{\partial \psi^{j_k}}{\partial x^{i_k}}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial y^{j_k}}\Big) \\
&= \sum_{j_1,\dots,j_k} \frac{\partial \psi^{j_1}}{\partial x^{i_1}}(p) \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \psi^{j_k}}{\partial x^{i_k}}(p) \sigma_{F(p)}\Big(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^{j_k}}\Big) \\
&= \sum_{j_1,\dots,j_k} \frac{\partial \psi^{j_1}}{\partial x^{i_1}}(p) \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \psi^{j_k}}{\partial x^{i_k}}(p) \cdot \sigma_{j_1,\dots,j_k}(F(p))
\end{aligned} \tag{7.1}$$

und der letzte Term ist glatt nach der Glattheit von F.

Bemerkung 7.8. Wir können den Pullback Operator nach der folgenden äquivalenten abstrakten Weise mit Hilfe des Pullback-Bündels und der algebraischen Konstruktionen auf Vektorbündeln definieren. Wir fangen an, die Tangentialbündel $\pi_M : TM \to M$ und $\pi_N : TN \to N$ und das Differential $\mathrm{d}F : TM \to TN$ von F zu betrachten. Es sei weiter $\mathcal{P}_F(\pi_N) : \mathcal{P}_F(TN) \to M$ das Pullback-Bündel. Wir definieren

$$\mathcal{P}_F(\mathrm{d}F) : TM \to \mathcal{P}_F(TN), \qquad \mathcal{P}_F(\mathrm{d}F)(v) = (\pi_M(v), \mathrm{d}F \cdot v), \qquad \forall\, v \in TM.$$

Das ist eine gute Definition, da $\pi_N(\mathrm{d}F \cdot v) = F(\pi_M(v))$. Wir nehmen das Duale der k-ten Tensorpotenz von $\mathcal{P}_F(\mathrm{d}F)$ und bekommen

$$\mathcal{P}_F(\mathrm{d}F)^{*\otimes k} : \mathcal{P}_F(T^*N)^{\otimes k} \to (T^*M)^{\otimes k}.$$

Wir haben dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(T^*N)^{\otimes k} \arrow[d, "\pi_N"'] & \mathcal{P}_F(T^*N)^{\otimes k} \arrow[l, "\tilde{F}"'] \arrow[r, "\mathcal{P}_F(\mathrm{d}F)^{*\otimes k}"] \arrow[d, "\mathcal{P}_F(\pi_N)"'] & (T^*M)^{\otimes k}. \arrow[dl, "\pi_M"] \\
N & M \arrow[l, "F"] &
\end{tikzcd}$$

Nun können wir die entsprechenden Operationen auf Schnitten durchführen

$$\begin{tikzcd}
\Gamma((T^*N)^{\otimes k}) \arrow[r, "\circ F"] \arrow[rr, bend right, "F^*"'] & \Gamma(\mathcal{P}_F(T^*N)^{\otimes k}) \arrow[r, "\mathcal{P}_F(\mathrm{d}F)^{*\otimes k}"] & \Gamma((T^*M)^{\otimes k})
\end{tikzcd}$$

und der Pullback-Operator von σ ist die Verkettung $F^*\sigma = \mathcal{P}_F(\mathrm{d}F)^{*\otimes k}(\sigma \circ F)$. △

Wir sammeln die Eigenschaften des Pullback-Operators in einem Satz.

Satz 7.9. *Es sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung. Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist der Pullback-Operator $F^* : \Gamma((T^*N)^{\otimes k}) \to \Gamma((T^*M)^{\otimes k})$ linear und verträglich mit dem Produkt von Tensoren:*

$$F^*(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = (F^*\sigma_1) \otimes (F^*\sigma_2), \qquad \forall\, \sigma_1 \in \Gamma((T^*N)^{\otimes k_1}),\ \sigma_2 \in \Gamma((T^*N)^{\otimes k_2}).$$

Außerdem erhält der Pull-Back Operator die Räume $\Gamma(\mathcal{S}^k M)$ und $\Gamma(\Lambda^k M)$ und ist verträglich mit den symmetrischen und antisymmetrischen Produkten $\odot$ und $\wedge$.

Für $(T^*M)^{\otimes 0} = M \times \mathbb{R}$ gilt $F^*f = f \circ F$ und

$$F^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(F^*f), \qquad \forall\, f \in C^\infty(M). \tag{7.2}$$

Insbesondere stimmt die Definition 7.7 für $k = 0$ mit der Definition 3.42 überein.

Beweis. Die Linearität lässt sich aus der Definition nachprüfen. Wenn wir $v = (v_1, \dots, v_{k_1})$ und $u = (u_1, \dots, u_{k_2})$ setzen, folgt die Verträglichkeit mit dem Produkt aus

$$\begin{aligned}
F^*(\sigma_1 \otimes \sigma_2)_p(v,u) &= (\sigma_1 \otimes \sigma_2)_{F(p)}(\mathrm{d}_pF \cdot v_1, \dots, \mathrm{d}_pF \cdot v_{k_1}, \mathrm{d}_pF \cdot u_1, \dots, \mathrm{d}_pF \cdot u_{k_2}) \\
&= (\sigma_1)_{F(p)}(\mathrm{d}_pF \cdot v_1, \dots, \mathrm{d}_pF \cdot v_{k_1}) \cdot (\sigma_2)_{F(p)}(\mathrm{d}_pF \cdot u_1, \dots, \mathrm{d}_pF \cdot u_{k_2}) \\
&= (F^*\sigma_1)_p(v) \cdot (F^*\sigma_2)_p(u) \\
&= (F^*\sigma_1)_p \otimes (F^*\sigma_2)_p(v,u).
\end{aligned}$$

Die Räume der (anti)symmetrischen kovarianten Tensoren wurden erhalten, da für alle Permutationen $\tau \in \mathfrak{S}_k$ gilt

$$(F^*\sigma)^\tau = F^*(\sigma^\tau)$$

(siehe Abschnitt 6.8.5 für die Definition der Wirkung von $\mathfrak{S}_k$ auf Tensoren) Daher sind auch die Symmetrisierung und die Antisymmetrisierung von Tensoren verträglich mit F^*:

$$\Pi_{\mathcal{S}^k}(F^*\sigma) = F^*(\Pi_{\mathcal{S}^k}\sigma), \qquad \Pi_{\Lambda^k}(F^*\sigma) = F^*(\Pi_{\Lambda^k}\sigma)$$

Nach der Verträglichkeit mit dem Tensorprodukt und der Definition von $\odot$ und $\wedge$ im Abschnitt 6.8.5 ist F^* auch mit solchen Produkten verträglich.

Wir zeigen schließlich, dass $F^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(F^*f)$ nach der Kettenregel:

$$F^*(\mathrm{d}f)_p = \mathrm{d}_{F(p)}f \cdot \mathrm{d}_pF = \mathrm{d}_p(f \circ F) = \mathrm{d}_p(F^*f). \qquad \square$$

Bemerkung 7.10. Eine andere Möglichkeit, um den Satz zu beweisen, wäre die Bemerkung 7.8 zu benutzen und separat die Eigenschaften für P_F und $F^*(\mathrm{d}F)$ zu zeigen. △

Wenn $M = N$ können wir σ und $F^*\sigma$ vergleichen. Wir geben einen Namen den Tensorfeldern, die durch F erhalten bleiben.

Definition 7.11. Es sei $F : M \to M$ eine glatte Abbildung. Wir sagen, dass $\sigma \in \Gamma(T^*M)^{\otimes k}$ ein F-invarianter kovarianter Tensorfeld ist, wenn $F^*\sigma = \sigma$. △

7.2 Verwandte kontravariante Tensoren bezüglich Abbildungen

Es sei $F : M \to N$ eine Abbildung. Wenn $\sigma_M \in \Gamma((TM)^{\otimes k})$ ein Schnitt ist, wollen wir überlegen, wie wir ein Element $\sigma_N \in \Gamma((TN)^{\otimes k})$ mit Hilfe von F finden können. Wir könnten dafür die Abbildung

$$(\mathrm{d}_p F)^{\otimes k} : (TM)^{\otimes k} \to (TN)^{\otimes k}$$

benutzen und verlangen

$$\sigma_N(F(p)) = (\mathrm{d}_p F)^{\otimes k} \cdot \sigma_M(p), \qquad \forall\, p \in M. \tag{7.3}$$

Bedauerlicherweise wird manchmal ein solches σ_N nicht existieren und manchmal werden es mehrere Elemente σ_N und σ'_N existieren, die die Gleichung (7.3) erfüllen. Wir geben daher die folgende Definition.

Definition 7.12. Es sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung. Wir sagen, dass $\sigma_M \in \Gamma((TM)^{\otimes k})$ und $\sigma_N \in \Gamma((TN)^{\otimes k})$ F-verwandt sind, wenn die Gleichung (7.3) gilt.

Es sei $F : M \to M$ eine glatte Abbildung. Wir sagen, dass $\sigma_M \in \Gamma(TM)^{\otimes k}$ ein F-invariantes kontravariantes Tensorfeld ist, wenn σ_M F-verwandt mit sich selbst ist. △

In der Anwendung zu der Theorie der Lie-Gruppen wird der Fall $k = 1$, sodass $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ der Raum der glatten Vektorfelder ist, von großen Bedeutung sein.

Beispiel 7.13. Wie schon erwähnt, wenn F und σ_M gegeben sind, ist es nicht immer möglich ein σ_N, das F-verwandt mit σ_M ist. Das Problem tretet hauptsächlich auf, wenn F nicht injektiv ist. Wenn $F(p_1) = F(p_2)$, dann nach (7.3) sollte wir haben

$$(\mathrm{d}_{p_1} F)^{\otimes k} \cdot \sigma_M(p_1) = (\mathrm{d}_{p_2} F)^{\otimes k} \cdot \sigma_M(p_2).$$

Wir können dann Fälle basteln, wobei diese Gleichung nicht stimmt. Wir nehmen zum Beispiel eine immergierte Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = \gamma(\pi)$ und $\dot\gamma(0) \neq \dot\gamma(1)$ (konkreter Fall: $\gamma(t) = (\sin t, \sin 2t)$)). Dann es sei $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}^2$, $\sigma_M = \frac{\partial}{\partial t}$, $p_1 = 0$, $p_2 = \pi$, $F = \gamma$. Wir haben nach Aufgabe 4.11

$$\mathrm{d}_0\gamma \cdot \frac{\partial}{\partial t} = \dot\gamma(0) \neq \dot\gamma(\pi) = \mathrm{d}_\pi\gamma \cdot \frac{\partial}{\partial t}.$$ △

Beispiel 7.14. Wie auch schon erwähnt, wenn F und σ_M gegeben sind, ist ein F-verwandter Tensorfeld von σ_M nicht eindeutig. Das Problem tretet hauptsächlich auf, wenn F nicht surjektiv ist, da 7.3 keine Bedingung über $\sigma_N(p')$ gibt, wenn $p' \notin F(M)$. Ein präziseres Argument läuft wie folgt, wenn genauer gilt, dass $F(M)$ abgeschlossen in N ist, aber $F(M) \neq N$.

Wenn σ_N F-verwandt zu σ_M ist, dann für alle $\sigma \in \Gamma((TN)^{\otimes k})$ mit Träger in $N \setminus F(M)$ und $\sigma \neq O_{(TN)^{\otimes k}}$, ist $\sigma_N + \sigma \neq \sigma_N$ auch F-verwandt zu σ_M, da

$$(\sigma_N + \sigma)_{F(p)} = (\sigma_N)_{F(p)} + \sigma_{F(p)} = (\sigma_N)_{F(p)} + 0_{F(p)} = (\sigma_N)_{F(p)}.$$

Die Existenz von σ folgt aus Satz 6.75 △

Wir werden nun einen wichtigen Fall betrachten, wo ein F-verwandtes kontravariantes Tensorfeld zu σ_M konstruiert werden kann. Wir nehmen an, dass $F : M \to N$ eine Einbettung mit $F(M)$ abgeschlossen in N. In diesem Fall ist $F(M)$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von N und wir können σ_N als Erweiterung von σ_M von der Untermannigfaltigkeit $F(M)$ auf die ganze Mannigfaltigkeit N auffassen.

Satz 7.15. *Es sei $F : M \to N$ eine Einbettung mit $F(M)$ abgeschlossen in N. Dann für alle $\sigma_M \in \Gamma((TM)^{\otimes k})$ existiert ein $\sigma_N \in \Gamma((TN)^{\otimes k})$, der F-verwandt zu σ_M ist.*

Proof. Es seien $\{(\varphi_i^N = (y^1, \ldots, y^n) : V_i^M \times W_i)\}_{i\in I}$ eine Familie von Karten von N und $\{(\varphi_i^M = (x^1, \ldots, x^m) : U_i^M \to V_i^M)\}_{i\in I}$ ein Atlas von M, sodass

$$F(U_i^M) = F(M) \cap U_i^N, \qquad \varphi_i^N \circ F \circ (\varphi_i^M)^{-1}(x) = (x, 0).$$

Diese Familien existieren, da F eine Einbettung ist (siehe Satz 5.9). Insbesondere gilt

$$\mathrm{d}_p F \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial y^i}, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{7.4}$$

Es sei schließlich $\pi_i : V_i^M \times W_i \to V_i^M$ die Projektion, sodass

$$\pi_i \circ \varphi_N^i \circ F = \varphi_i^m. \tag{7.5}$$

Die Karte φ_i^N liefert eine Trivialisierung von $(TN)^{\otimes k}$ über U_i^N mit Rahmen

$$\frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_k}}, \qquad i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Auf ähnlicher Weise liefert φ_i^M eine Trivialisierung von $(TM)^{\otimes k}$ über U_i^M mit Rahmen

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}, \qquad i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Es sei nun $\sigma_M \in \Gamma((TM)^{\otimes k})$. Dann existieren glatte Koeffizienten $(\tau_M)_{i_1,\ldots i_k} : V_M^i \to \mathbb{R}$, sodass für alle $p \in U_i^M$:

$$\sigma_M(p) = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \tau_M(\varphi_i^M(p))_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}, \qquad i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Wir setzen für alle $p' \in U_i^N$:

$$\sigma_N^i(p') := \sum_{i_1,\ldots,i_k} \tau_M((\pi_i \circ \varphi_i^N(p')))_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_k}}, \qquad i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$$

Nach (7.4) und (7.5) sind σ_N^i und $\sigma|_{U_i^M}$ F-verwandt.

Wir wollen nun aus den $\{\sigma_N^i \in \Gamma(T(U_i^N)^{\otimes k})\}$ einen $\sigma_N \in \Gamma(TN^{\otimes k})$, der F-verwandt mit σ_M ist, basteln. Wir betrachten dafür eine Zerlegung der Eins von N bezüglich der offenen

Überdeckung $\{N \setminus F(M)\} \cup \{U_i^N\}_{i\in I}$. Hier haben wir benutzt, dass $F(M)$ abgeschlossen in M ist. Wir bezeichnen die Zerlegung der Eins mit $\{\rho\}\cup\{\rho_i\}_{i\in I}$. Dann für alle $p' \in F(M)$ gilt $\rho(p') = 0$ und daher $1 = \sum_{i\in I} \rho_i(p')$. Da $T(\rho_i) \subset U_i^n$ ist $\rho_i\sigma_N^i$ auf die ganze N fortsetzbar und wir definieren

$$\sigma_N := \sum_{i\in I} \rho_i\sigma_N^i \in \Gamma((TN)^{\otimes k}).$$

Das Tensorfeld σ_N ist wohldefiniert und glatt, da $\{T(\rho_i)\}_{i\in I}$ lokal endlich ist. Schließlich gilt für alle $p \in M$:

$$\begin{aligned}
\sigma_N(F(p)) = \sum_{i\in I} \rho_i(F(p))\sigma_N^i(F(p)) &= \sum_{i\in I} \rho_i(F(p))(\mathrm{d}_pF)^{\otimes k} \cdot \sigma_M(p) \\
&= \Big(\sum_{i\in I} \rho_i(F(p))\Big) \cdot (\mathrm{d}_pF)^{\otimes k} \cdot \sigma_M(p) \\
&= (\mathrm{d}_pF)^{\otimes k} \cdot \sigma_M(p),
\end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichung aus der Tatsache folgt, dass $\rho_i(F(p))$ ungleich null genau dann ist, wenn $p \in U_i^M$. □

Folgerung 7.16. *Es sei $F : M \to N$ eine Einbettung. Dann existiert eine offene Umgebung U von $F(M)$ in N, sodass für alle $\sigma_M \in \Gamma((TM)^{\otimes k})$ existiert ein $\sigma_U \in \Gamma((TU)^{\otimes k})$, der $F|^U$-verwandt zu σ_M ist.*

Beweis. Nach Bemerkung 5.21 existiert eine Umgebung U von $F(M)$, sodass $F(M)$ abgeschlossen in U ist. Die Aussage folgt dann aus Satz 7.15. □

Man kann auch andersrum sich fragen, ob wenn σ_N gegeben wird, einen F-verwandten σ_M zu finden ist. Eine notwendige Bedingung dafür ist, dass

$$\sigma_N(F(p)) \in (\mathrm{d}_pF)^{\otimes k}(T_pM)^{\otimes k}. \tag{7.6}$$

Zum Beispiel wenn $k = 1$ und $F : M \to N$ die Inklusion einer Untermannigfalitigkeit ist, dann σ_N ist ein Vektorfeld auf N und die Bedingung sagt uns, dass für $p \in M$ der Tangentenvektor $\sigma_N(p)$ tangential zu M steht (siehe Satz 5.26).s

Die Bedingung (7.6) ist auch hinreichend, wenn $F : M \to N$ eine Immersion ist. In diesem Fall bekommen wir umsonst, dass σ_M eindeutig ist.

Satz 7.17. *Es sei $F : M \to N$ eine Immersion. Für jedes Tensorfeld $\sigma_N \in \Gamma((TN)^{\otimes k})$, der die Bedingung (7.6) erfüllt, existiert eindeutig ein Pull-Back Tensorfeld*

$$F^*\sigma_N \in \Gamma((TM)^{\otimes k}),$$

der F-verwandt mit σ_N ist. Das Tensorfeld ist definiert durch

$$(F^*\sigma_N)(p) = \Big(\mathrm{d}_pF^{\otimes k}\Big)^{-1} \cdot \sigma_N(F(p)), \qquad \forall\, p \in M. \tag{7.7}$$

Das Pull-Back ist verträglich mit dem Tensor-Produkt: Wenn $\sigma_N^1 \in \Gamma((TN)^{\otimes k_1})$ und $\sigma_N^2 \in \Gamma((TN)^{\otimes k_2})$ die Bedingung (7.6) erfüllen, dann erfüllt $\sigma_N^1 \otimes \sigma_N^2 \in \Gamma((TN)^{\otimes(k_1+k_2)})$ auch die Bedingung und

$$F^*(\sigma_N^1 \otimes \sigma_N^2) = (F^*\sigma_N^1) \otimes (F^*\sigma_N^2).$$

Proof. Wir wissen, dass F eine Immersion ist. Also ist $\mathrm{d}_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ injektiv für alle $p \in M$. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass auch $\mathrm{d}_pF^{\otimes k} : (T_pM)^{\otimes k} \to (T_{F(p)}N)^{\otimes k}$ injektiv ist. Da σ_N die Bedingung (7.6) erfüllt, sehen wir, dass $F^*\sigma_N$ wohldefiniert ist, und dass ein mit σ_N F-verwandtes Tensorfeld, wenn überhaupt existiert, eindeutig sein muss. Es bleibt nur zu zeigen, dass $F^*\sigma_N$ glatt ist. Dafür benutzen wir Satz 5.9 und finden für jeden $p \in M$ eine Karte $\varphi_M = (x^1, \ldots, x^m) : U_M \to V_M$ um p in M und eine Karte $\varphi_N = (y^1, \ldots, y^n) : U_N \to V_M \times W$ um $F(p)$ in N, sodass $\varphi_N \circ F \circ \varphi_M^{-1}(x) = (x, 0)$. Das Argument ist nun ähnlich zu dem Beweis von Satz 7.15. Da $\mathrm{d}_pF \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial y^i}$ sehen wir, dass das Bild der Abbildung $(\mathrm{d}_pF)^{\otimes k}$ von den Tensorfeldern

$$\frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_k}}, \qquad i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$$

aufgespannt wird. Da σ_N die Bedingung (7.6) erfüllt, haben wir die Darstellung

$$\sigma_N(F(p)) = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \sigma_N(\varphi_i^N(F(p)))_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_k}}, \qquad i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Daher gilt

$$F^*\sigma_M(p) = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \sigma_N(\varphi_i^N(F(p)))_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}, \qquad i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Dieses Tensorfeld ist glatt, da alle die Funktionen $p \mapsto \sigma_N(\varphi_i^N(F(p)))_{i_1,\ldots,i_k}$ glatt sind.

Für die Verträglichkeit bezüglich des Tensorproduktes ist es genug zu bemerken, dass für alle $p \in M$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_pF^{\otimes(k_1+k_2)}(F^*\sigma_N^1 \otimes F^*\sigma_N^2)(p) &= (\mathrm{d}_pF^{\otimes k_1}F^*\sigma_N^1(p)) \otimes (\mathrm{d}_pF^{\otimes k_2}F^*\sigma_N^2(p)) \\ &= \sigma_N^1(p) \otimes \sigma_N^2(p). \end{aligned}$$ □

Folgerung 7.18. *Es sei $F : M \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus. Für alle $\sigma_N \in \Gamma((TN)^{\otimes k})$ ist $F^*\sigma_N \in \Gamma((TM)^{\otimes k})$ eindeutig das Tensorfeld auf M, das F-verwandt mit σ_N ist.*

Beweis. In diesem Fall ist die Bedingung (7.6) immer erfüllt. □

Folgerung 7.19. *Es sei $F : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Für alle $\sigma_M \in \Gamma((TM)^{\otimes k})$ ist $(F^{-1})^*\sigma_M \in \Gamma((TN)^{\otimes k})$ eindeutig das Tensorfeld auf N, das F-verwandt mit σ_M ist.*

Beweis. Wir wenden die vorherige Folgerung an den Diffeomorphismus F^{-1} an. □

Bemerkung 7.20. Der Satz (7.17) lässt sich zu glatten Abbildungen $F : M \to N$ verallgemeinern, sodass F konstanten Rang hat (das heißt: $\mathrm{d}_p F : T_p M \to T_{F(p)} N$ besitzt den selben Rang für alle $p \in M$). Ein wesentliches Beispiel sind Submersionen. Wenn F keine Immersion ist, können wir aber die Formel (7.7) nicht verwenden, da $\mathrm{d}_p F^{\otimes k}$ nicht invertierbar ist. Außerdem gibt es in diesem Fall mehrere Tensorfelder auf M, die mit σ_N F-verwandt sind. Es sei σ_M ein Tensorfeld, das mit σ_N verwandt ist. Dann $\sigma'_M \in \Gamma((TM)^{\otimes k})$ ist F-verwandt mit σ_N genau dann, wenn $\sigma_M - \sigma'_M$ ein Schnitt der Distribution $\ker \mathrm{d}F \to M$ ist. $\triangle$

8 Vektorfelder und Flüße

In diesem Abschnitt wollen wir Vektorfelder auf M genauer anschauen. Als wir Tangentialvektoren $v \in T_p M$ eingeführt haben, haben wir gesehen, dass einerseits sie als Äquivalenzklassen $[\gamma]_p$ von Kurven und andererseits als Derivationen auf dem Raum $C^\infty_p M$ der Keimen gesehen werden können. Da Vektorfelder Schnitte des Tangentialbündels $TM \to M$ sind, erwarten wir für die eine entsprechende duale Interpretation. Die erste wird durch Flüßen Φ^t auf M und die zweiten durch Derivationen auf der Algebra $C^\infty(M)$ der glatten Funktionen gegeben. Beiden Interpretationen werden zu einer zusätzlichen Struktur auf dem Raum von Vektorfelder führen: die Lie-Klammer, die misst wie sehr, die Flüße von zwei Vektorfeldern infinitesimal nicht kommutieren oder wie sehr die Derivationen von zwei Vektorfeldern nicht kommutieren.

8.1 Die Integralkurven eines Vektorfelds

Wenn $\gamma : (a, b) \to M$ eine glatte Kurve ist, haben wir

$$\dot\gamma(t) = [\gamma(\cdot + t)]_{\gamma(t)} = \mathrm{d}_t\gamma \cdot \frac{\partial}{\partial t} \in T_{\gamma(t)} M, \quad \forall\, t \in (a, b)$$

Wenn $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M ist, können wir daher nach Kurven suchen, für die

$$\dot\gamma(t) = X(\gamma(t)), \qquad \forall\, t \in (a, b). \tag{8.1}$$

Definition 8.1. Es sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\gamma : (a, b) \to M$ eine glatte Kurve. Wir sagen, dass γ eine Integralkurve von X ist, wenn (8.1) erfüllt ist. $\triangle$

Bemerkung 8.2. Wenn $\gamma : (a, b) \to M$ eine Integralkurve von X ist, ist auch die Kurve $\gamma_{t_0} : (a - t_0, b - t_0) \to M$, $\gamma_{t_0}(t) = \gamma(t + t_0)$ eine Integralkurve von X. $\triangle$

Wir werfen nun einen Blick auf die Gleichung (8.1) in Koordinaten. Es sei angenommen, dass $\gamma((a, b)) \subset U$, wobei $\varphi : U \to V$ eine Karte von M ist. Wir setzen

$$\tilde X : V \to \mathbb{R}^m, \qquad \tilde X(q) := \alpha_{\varphi,q}\Big(X\big(\varphi^{-1}(q)\big)\Big), \quad \forall\, q \in V, \tag{8.2}$$

wobei $\tilde X$ glatt nach (6.1) ist. Wenn $\tilde\gamma := \varphi \circ \gamma$ ist, dann

$$\alpha_{\varphi,\gamma(t)}(\dot\gamma(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi \circ \gamma)$$

und wir sehen, dass (8.1) gleichbedeutend mit

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \tilde{X}(\tilde{\gamma}(t)), \qquad \forall\, t \in (a,b) \tag{8.3}$$

ist. Also ist $\tilde{\gamma}$ eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (8.3) erster Ordnung in V. Im Allgemein ist diese Differentialgleichung nicht linear und auch nicht explizit lösbar. Trotzdem ist $\tilde{X}$ glatt und insbesondere lokal Lipschitz und deshalb gelten sowohl die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen des mit (8.3) assoziierten Anfangswertproblems als auch ihre glatte Abhängigkeit von dem Anfangswert $q \in V$. Solche Eigenschaften werden im folgenden Satz, der vom Analysis III bekannt sein sollte, zusammengefasst.

Satz 8.3. *Es sei W eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und $Y : W \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung. Für alle $q_0 \in W$ gibt es $\epsilon(q_0) > 0$ und eine offene Menge $W(q_0) \subset W$, sodass es für alle $q \in W(q_0)$ und alle $t_0 \in \mathbb{R}$ eine einzige glatte Lösung $\delta_{q,t_0} : (t_0 - \epsilon(q_0), t_0 + \epsilon(q_0)) \to W$ des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} \dot{\delta}_{q,t_0}(t) = Y(\delta_{q,t_0}(t)), \\ \delta_{q,t_0}(t_0) = q \end{cases} \tag{8.4}$$

existiert. Für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $\psi : (t_0 - \epsilon(q_0), t_0 + \epsilon(q_0)) \times W(q_0) \to W$ gegeben durch $\psi(t,q) = \delta_{q,t_0}(t)$ glatt. □

Die Äquivalenz zwischen (8.1) und (8.3) auf U und V kann nun benutzt werden, um einen entsprechenden Satz auf Mannigfaltigkeiten zu beweisen.

Satz 8.4. *Es sei X ein glattes Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M. Die folgenden Aussagen gelten:*

Existenz und Glattheit *Für alle $p_0 \in M$ gibt es $\epsilon(p_0) > 0$ und eine offene Menge $U(p_0) \subset M$, sodass es für alle $p \in U(p_0)$ und alle $t_0 \in \mathbb{R}$ eine glatte Lösung $\gamma_{p,t_0} : (t_0 - \epsilon(p_0), t_0 + \epsilon(p_0)) \to M$ des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \\ \gamma(t_0) = p. \end{cases} \tag{8.5}$$

Für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ ist die folgende Abbildung glatt:

$$\Psi : (t_0 - \epsilon(p_0), t_0 + \epsilon(p_0)) \times U(p_0) \to M, \qquad \Psi(t,p) = \gamma_{p,t_0}(t). \tag{8.6}$$

Eindeutigkeit *Für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ und alle $p \in M$ stimmen zwei Lösungen $\gamma_1 : (a_1, b_1) \to M$ und $\gamma_2 : (a_2, b_2) \to M$ des Anfangswertsproblems (8.5) auf $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ überein.*

Maximale Lösungen *Es sei $(\Phi_X)_p : (\mathcal{U}_X)_p \to M$ die eindeutige Lösung von (8.5) mit $t_0 = 0$ und maximalem Definitionsintervall $(\mathcal{U}_X)_p \subset \mathbb{R}$. Es sei angenommen, dass $\sup(\mathcal{U}_X)_p < \infty$. Dann für alle $K \subset M$ kompakt und alle $t \in (\mathcal{U}_X)_p$, gibt es $t' \in (t, \sup(\mathcal{U}_X)_p)$ mit $(\Phi_X)_p(t'') \notin (\mathcal{U}_X)_p$ für alle $t'' \in (t', \sup(\mathcal{U}_X)_p)$. Eine ähnliche Aussage gilt für $\inf(\mathcal{U}_X)_p$.*

Beweis. Wir nehmen eine Karte (U, φ) um p. Dann folgt die Existenz und die Glattheit direkt aus dem Satz 8.3 mit $Y = \tilde{X}$ und $W = V$ der Äquivalenz von (8.1) und (8.3) auf U und V, da für $U(p_0) := \varphi^{-1}(W(\varphi(p_0)))$ wir bekommen

$$\Psi(t,p) = \varphi^{-1}\big(\psi(t,\varphi(p))\big), \qquad \forall\,(t,p) \in (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon) \times U(p_0).$$

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit. Wir schränken γ_1 und γ_2 auf $(a_3, b_3) := (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ und wir bezeichnen die Einschränkungen noch mit γ_1 und γ_2. Wir möchten zeigen dann, dass $\gamma_1 = \gamma_2$. Wir betrachten die Menge $I = \{t \in (a_3, b_3) \mid \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$. Wir wissen, dass $t_0 \in I$. Da M hausdorffsch ist, ist I abgeschlossen in (a_3, b_3). Wir zeigen nun, dass I offen ist. Es sei $t_0 \in I$. Dann sind γ_1 und γ_2 Lösungen von (8.5) mit Anfangswert $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$. Nach der Existenz und Glattheit stimmen γ_1 und γ_2 in einer Umgebung von t_0. Da (a_3, b_3) zusammenhängend ist, folgt es dass $I = (a_3, b_3)$.

Nach der Existenz und der Eindeutigkeit bekommen wir die eindeutige maximale Lösung $(\Phi_X)_p : (\mathcal{U}_X)_p \to M$. Es sei nun K kompakt. Für alle $p_0 \in K$ sei $\epsilon(p_0) > 0$ und $U(p_0)$ gegeben von der Existenz und Glattheit. Da K kompakt ist, finden wir eine endliche Familie $\{U(p_0^i)\}_{i=1}^k$ die K überdeckt. Dann für alle $p' \in K$ und alle $t_0 \in \mathbb{R}$ existiert die Lösung von (8.5) auf $(t_0 - \epsilon(K), t_0 + \epsilon(K))$, wobei $\epsilon(K) := \min_{i=1,\dots,k} \epsilon(p_0^i)$. Es folgt daraus, dass wenn $(\Phi_X)_p$ eine maximale Lösung mit $\sup(\mathcal{U}_X)_p < \infty$, dann $(\Phi_X)_p(t) \notin K$ für alle $t \in (\sup(\mathcal{U}_X)_p - \epsilon(K), \sup(\mathcal{U}_X)_p)$. Ansonsten könnten wir $(\Phi_X)_p$ zu einer Lösung mir größerem Definitionsintervall verlängern. □

8.2 Flüße

Wir können nun die maximale Lösungen $(\Phi_X)_p : (\mathcal{U}_X)_p \to M$ von (8.5) mit $t_0 = 0$ benutzen, um die Abbildung Ψ definiert in (8.6) zu globalisieren. Wir setzen zuerst

$$\mathcal{U}_X := \{(t,p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in (\mathcal{U}_X)_p\}.$$

und definieren

$$\Phi_X : \mathcal{U}_X \to M, \qquad \Phi_X(p,t) := (\Phi_X)_p(t), \qquad \forall\,(t,p) \in \mathcal{U}_X.$$

Wir schneiden $\mathcal{U}_X$ mit $\{t\} \times M$ und bekommen

$$\mathcal{U}_X^t := \{p \in M \mid t \in (\mathcal{U}_X)_p\} = \{p \in M \mid (t,p) \in \mathcal{U}_X\}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten dann die Einschränkung

$$\Phi_X^t : \mathcal{U}_X^t \to M, \qquad \Phi_X^t(p) = \Phi_X(t,p), \qquad \forall\, p \in \mathcal{U}_X^t.$$

Nach Definition gilt $\mathcal{U}_X^0 = M$ und $\Phi_X^0 = \mathrm{id}_M$. Nach Satz 8.4 gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{U}_X^s \cap \mathcal{U}_X^{t+s} = \mathcal{U}_X^s \cap (\Phi_X^s)^{-1}(\mathcal{U}_X^t)$$

und

$$\Phi_X^s(\Phi_X^t(p)) = \Phi_X^{s+t}(p), \qquad \forall\, p \in \mathcal{U}_X^{t+s}.$$

Das heißt: wenn die Lösung mit Anfangswert p existiert für Zeit s, dann existiert die Lösung mit Anfangswert p für Zeit $s+t$ genau dann, wenn die Lösung mit Anfangswert $\Phi_X^s(p)$ für Zeit t existiert. In diesem Fall stimmt die Lösung mit Anfangswert p nach Zeit $s+t$ mit der Lösung mit Anfangswert $\Phi_X^s(p)$ nach Zeit t.

Hilfsatz 8.5. *Die Menge $\mathcal{U}_X$ ist offen und Φ_X ist glatt.*

Beweis. Wir definieren $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}_X$ als die Teilmenge der $(t,p) \in \mathcal{U}_X$ mit der folgenden Eigenschaft: es existieren ein offenes Intervall I, das 0 und t enthält, und $U \subset M$ offen, sodass $I \times U \subset \mathcal{U}_X$ und $\Phi_X|_{I\times U}$ glatt ist. Unser Ziel ist zu zeigen, dass $\mathcal{W} = \mathcal{U}_X$. Nach Definition ist $\mathcal{W}$ offen und enthält $\{0\}\times M$. Es sei nun $p \in M$ beliebig. Der Beweis ist fertig, wenn $(\mathcal{U}_X)_p \times \{p\} \subset \mathcal{W}$ gilt. Es sei angenommen, dass $(t,p) \notin \mathcal{W}$. Wir betrachten hier den Fall $t > 0$. Der Fall $t < 0$ ist ähnlich. Dann ist $t_0 := \sup\{\tau \in (\mathcal{U}_X)_p \mid [0,\tau] \times \{p\} \subset \mathcal{W}\}$ ein Element von $(\mathcal{U}_X)_p$. Wir setzen $p_0 = \Phi_X^\tau(p)$ und es seien $\epsilon(p_0)$ und $U(p_0)$ als im Satz 8.4. Wir haben dann die glatte Abbildung $\Psi_X : (t_0 - \epsilon(p_0), t_0 + \epsilon(p_0)) \times U(p_0) \to M$. Wir wählen nun $t_1 \in (t_0 - \epsilon(p_0), t_0)$, sodass $\Phi_X^{t_1}(p) \in U(p_0)$. Da $t_1 < t_0$ ist $\Phi_X|_{I\times U_1} : I \times U_1 >\!\!\to M$ glatt, wobei I ein offenes Intervall, das 0 und t_1 enthält und U_1 eine offene Umgebung von p ist. Wir können U_1 so klein wählen, dass $\Phi_X^{t_1}(U_1) \subset U(p_0)$. Es sei nun $I_1 = I \cup (t_0 - \epsilon(p_0), t_0 + \epsilon(p_0))$. Das ist ein offenen Intervall, das 0 und t_0 enthält. Wir definieren nun

$$F : I_1 \times U_1 \to M, \qquad F(t',p') = \begin{cases} \Phi_X(t',p') & \text{falls } t' \in I \\ \Psi_X(t', \Phi_X(t_1,p')) & \text{falls } t' \in (t_0 - \epsilon(p_0), t_0 + \epsilon(p_0)). \end{cases}$$

Die Abbildung F ist wohldefiniert nach der Eindeutigkeit im Satz 8.4 und $t' \mapsto F(t',p')$ ist eine Lösung von (8.5) mit Anfangswert p' zur Zeit 0. Das heißt, dass $I_1 \times U_1 \subset \mathcal{U}_X$ und dass $F = \Phi_X|_{I_1\times U_1}$. Nach dem Hilfsatz 3.32.(iii) F ist glatt. Also ist $(t_0,p) \in \mathcal{W}$ gegen die Voraussetzung. □

In der obigen Diskussion haben wir gezeigt, dass die Abbildung Φ_X bestimmte Eigenschaften erfüllt. Wir definieren dann einen Fluß auf einer Mannigfaltigkeit als ein Objekt, das diese Eigenschaften besitzt. Wir werden dann sehen, dass jeder Fluß von einem Vektorfeld kommt.

Definition 8.6. Es sei $\Phi : \mathcal{U} \to M$ eine glatte Abbildung, wobei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times M$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times M$ ist. Für alle $(s_0,p_0) \in \mathbb{R} \times M$ setzen wir

$$\mathcal{U}_{p_0} := \{s \in \mathbb{R} \mid (s,p_0) \in \mathcal{U}\}$$

und

$$\mathcal{U}^{s_0} := \{p \in M \mid (s_0,p) \in \mathcal{U}\}, \quad \Phi^{s_0} : \mathcal{U}^{s_0} \to M, \quad \Phi^{s_0}(p) = \Phi(s_0,p).$$

Wir sagen, dass Φ ein Fluß auf M ist, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) für alle $p \in M$ ist $\mathcal{U}_p$ ein Intervall, welches $0 \in \mathbb{R}$ enthält;

(ii) $\Phi^0 : M \to M$ ist die Identitätsabbildung;

(iii) für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathcal{U}^s \cap \mathcal{U}^{t+s} = \mathcal{U}^s \cap (\Phi^s)^{-1}(\mathcal{U}^t),$$

und die Fluß-Eigenschaft herrscht

$$\Phi^t(\Phi^s(p)) = \Phi^{s+t}(p), \qquad \forall\, p \in \mathcal{U}^{t+s} \cap \mathcal{U}^s. \tag{8.7}$$

Der Fluß heißt vollständig, wenn $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times M$. In diesem Fall ist $\mathcal{U}^s = M$ und $\Phi^s : M \to M$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Die Formel (8.7) nimmt die Gestalt $\Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t}$, $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$. △

Bemerkung 8.7. Die Tatsache, dass $\mathcal{U}^0 = M$ folgt aus (i). △

Beispiel 8.8. Zeigen Sie, dass ein Fluß genau dann vollständig ist, wenn es $\epsilon > 0$ mit $(-\epsilon, \epsilon) \times M \subset \mathcal{U}$ gibt. △

Eine der wichtigsten Eigenschaften von Flüßen ist, dass sie eine 1-Parameter Familie von Diffeomorphismen liefern.

Folgerung 8.9. *Es sei Φ ein Fluß. Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ haben wir einen Diffeomorphismus*

$$\Phi^s : \mathcal{U}^s \cap \mathcal{U}^{t+s} \to \mathcal{U}^{-s} \cap \mathcal{U}^t.$$

mit Inverse $\Phi^{-s} : \mathcal{U}^{-s} \cap \mathcal{U}^t \to \mathcal{U}^s \cap \mathcal{U}^{t+s}$. Das impliziert, dass

$$\mathrm{d}_{\Phi^s(p)}\Phi^{-s} \cdot \mathrm{d}_p\Phi^s = \mathrm{id}_{T_pM}, \qquad \forall (s, p) \in \mathcal{U}.$$

Insbesondere wenn Φ vollständig ist, bekommen wir einen Homomorphismus von Gruppen $\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$, $s \mapsto \Phi^s$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Behauptung für $t = 0$. Wenn wir (iii) mit $t = -s$ anwenden, finden wir $\mathcal{U}^s = \mathcal{U}^s \cap (\Phi^s)^{-1}(\mathcal{U}^{-s})$. Daher ist $\Phi^s(p) \in \mathcal{U}^{-s}$ für alle $p \in \mathcal{U}^s$ und nach (8.7) und (ii) folgt

$$\Phi^{-s}(\Phi^s(p)) = p. \tag{8.8}$$

Also ist $\Phi^s : \mathcal{U}^s \to \mathcal{U}^{-s}$ wohldefiniert und Φ^{-s} ist eine linke Inverse für Φ^s. Das gleiche Argument mit $-s$ statt s liefert, dass Φ^s ein Diffeomorphismus mit Inverse Φ^{-s} ist.

Es sei nun t beliebig. Wir wissen, dass $\mathcal{U}^s \cap \mathcal{U}^{t+s}$ offen in M ist und $\Phi^s : \mathcal{U}^s \cap \mathcal{U}^{t+s} \to M$ glatt ist. Es sei nun $p \in \mathcal{U}^s \cap \mathcal{U}^{t+s}$. Nach (iii) in Definition 8.6 ist $\Phi^s(p) \in \mathcal{U}^t$. Nach dem Beweis des derzeitigen Satzes für $t = 0$ ist $\Phi^s(p) \in \mathcal{U}^{-s}$. Also ist $\Phi^s : \mathcal{U}^s \cap \mathcal{U}^{t+s} \to \mathcal{U}^{-s} \cap \mathcal{U}^t$ wohldefiniert. Wenn wir nur $s' = -s$ und $t' = t + s$ setzen, sehen wir, dass $\Phi^{-s} : \mathcal{U}^{-s} \cap \mathcal{U}^t \to \mathcal{U}^s \cap \mathcal{U}^{t+s}$ auch wohldefiniert ist. Nach dem Beweis des derzeitigen Satzes für $t = 0$ sehen wir, dass Φ^s und Φ^{-s} Inverse zueinander sind. □

Wir können schließlich die Äquivalenz zwischen Vektorfelder und Flüßen zeigen.

Satz 8.10. *Es sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dann ist Φ_X ein Fluß. Es sei umgekehrt $\Phi : \mathcal{U} \to M$ ein Fluß auf M. Dann ist $\Phi = \Phi_X$, wobei*

$$X(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \Phi_p(s) \in T_pM, \qquad \forall\, p \in M.$$

Beweis. Die Tatsache, dass Φ_X ein Fluß ist, wurde in der obigen Diskussion festgestellt. Es sei nun Φ ein Fluß. Wir zeigen zuerst, dass X glatt ist. Wir wählen dafür eine beliebige Karte $\varphi = (x^1, \dots, x^m) \to V$ auf M. Dann ist

$$X = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}x^i(X) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$$

und die Glattheit von X ist äquivalent zur Glattheit der Koeffizienten $\mathrm{d}x^i(X)$. Nach Definition von X gilt

$$\mathrm{d}x^i(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} x^i \circ \Phi_p(t) = \frac{\partial}{\partial t}(x^i \circ \Phi)(0, p).$$

Nun ist $x^i \circ \Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times U' \to \mathbb{R}$ eine glatt Funktion, wobei U' eine Umgebung von p ist, sodass $\Phi((-\epsilon, \epsilon) \times U') \subset U$. Daher ist auch ihre partielle Ableitung nach t glatt (t ist eine der Koordinate in dem Produktatlas auf $\mathbb{R} \times M$). Wir zeigen nun, dass $\Phi_p : \mathcal{U}_p \to M$ eine Integralkurve von X ist. Für $t_0 \in \mathcal{U}_p$ haben wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} \Phi_p(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{s=0} \Phi_p(s + t_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{s=0} \Phi_{\Phi_p(t_0)}(s) = X(\Phi_p(t_0)).$$

Es bleibt zu zeigen, dass Φ_p die maximale Lösung $\gamma_p : (a, b) \to M$ von (8.5) mit $t_0 = 0$ ist. Es sei angenommen per Widerspruch, dass das nicht der Fall ist. Dann ist $t_+ := \sup \mathcal{U}_p < b$ oder $t_- := \inf \mathcal{U}_p > a$. Wir betrachten nur den ersten Fall. Es sei $p_1 = \gamma_p(t_+)$. Da $\mathcal{U}$ offen ist, existiert $\epsilon > 0$, sodass $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathcal{U}_{p_1}$. Nun gilt $p_2 := \Phi(-\epsilon/2, p_1) = \Phi(t_+ - \epsilon/2, p)$, da beide gleich zu $\gamma_p(t_+ - \epsilon/2)$ sind. Nach Folgerung 8.9 ist $p_2 = \Phi^{-\epsilon/2}(p_1) \in \mathcal{U}^{\epsilon/2} \cap \mathcal{U}^{\epsilon}$. Deshalb ist $p \in \mathcal{U}^{t_+ - \epsilon/2} \cap (\Phi^{t_+ - \epsilon/2})^{-1}(\mathcal{U}^{\epsilon})$. Nach (ii) in Definition 8.6 ist $p \in \mathcal{U}^{t_+ + \epsilon/2}$. Das gibt uns den Widerspruch $t_+ + \epsilon/2 \in \mathcal{U}_p$. $\square$

Beispiel 8.11. Es sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld mit kompaktem Träger. Zeigen Sie, dass Φ_X vollständig ist. Schließen Sie daraus, dass alle Flüße auf einer kompakten Mannigfaltigkeit vollständig sind. $\triangle$

Wenn X und Y F-verwandte Vektorfelder sind, sind die entsprechenden Flüssen durch F konjugiert.

Folgerung 8.12. *Es sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung und $X_M \in \mathfrak{X}(M), X_N \in \mathfrak{X}(N)$ F-verwandte Vektorfelder. Dann sendet F Integralkurven von X_M auf Integralkurven von X_N. Insbesondere gilt $F(\mathcal{U}^t_{X_M}) \subset \mathcal{U}^t_{X_N}$ und $F \circ \Phi^t_{X_M} = \Phi^t_{X_N} \circ F$. Das heißt, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}^t_{X_M} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Phi^t_{X_M}"'] & \mathcal{U}^t_{X_N} \arrow[d, "\Phi^t_{X_N}"] \\
\mathcal{U}^{-t}_{X_M} \arrow[r, "F"] & \mathcal{U}^{-t}_{X_N}
\end{tikzcd}.$$

Proof. Es sei $\gamma : I \to M$ eine Integralkurve von X_M. Dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ \gamma) = \mathrm{d}_\gamma F \cdot \dot{\gamma} = \mathrm{d}_\gamma F \cdot X_M(\gamma) = X_N(F \circ \gamma),$$

wobei die letzte Gleichung aus der Verwandtschaft zwischen X_M und X_N folgt. Nun muss $t \mapsto F \circ \Phi^t_{X_M}(p)$, $t \in (\mathcal{U}_{X_M})_p$ eine Integralkurve von X_N mit Anfangswert $F(p)$ sein. Also $F \circ \Phi^t_{X_M}(p) = \Phi^t_{X_N} \circ F(p)$. □

8.3 Änderung von Tensorfeldern entlang einem Fluß

Es sei $\Phi : \mathcal{U} \to M$ ein Fluß und es sei σ entweder ein kovariantes oder ein kontravariantes Tensorfeld auf M. Wir wollen nun verstehen, wenn Φ das Tensorfeld σ erhält.

Definition 8.13. Ein Tensorfeld σ auf M heißt Φ-invariant, wenn σ ist Φ^s-invariant auf $\mathcal{U}^s$ für alle $s \in \mathbb{R}$. △

Bemerkung 8.14. Das Vektorfeld X ist Φ_X-invariant. Wir haben nämlich

$$\mathrm{d}_p\Phi^s_X \cdot X(p) = \mathrm{d}_p\Phi^s_X \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Phi^t_X(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (\Phi^s_X \circ \Phi^t_X(p)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Phi^{t+s}_X(p) = X(\Phi^s_X(p)).$$ △

Da die Φ^s Diffeomorphismen sind, wissen wir, dass σ genau dann Φ-invariant ist, wenn

$$(\Phi^s)^*\sigma = \sigma, \qquad \forall\, s \in \mathbb{R},$$

wobei $(\Phi^s)^*$ der Pull-Back von kovarienten (bzw. kontravarianten Tensorfeldern), die in der Definition 7.7 (bzw. im Satz 7.17) eingeführt wurde.

Wir können dann messen, wie sehr σ abweicht, Φ-invariant zu sein, indem wir $(\Phi^s)^*\sigma$ nach s ableiten. Wenn zum Beispiel $\sigma \in \Gamma((TM)^{\otimes h})$, haben wir für jedes $p \in M$ einen Weg

$$s \mapsto \big((\Phi^s)^*\sigma\big)(p) \in (T_pM)^{\otimes h} \qquad \forall\, s \in \mathcal{U}_p.$$

Da $(T_pM)^{\otimes h}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, ergibt Sinn zu untersuchen, ob der obige Weg differenzierbar im Sinne der Analysis ist. Die Fluß-Eigenschaft (8.7) wird uns in (8.11) sagen, dass die Ableitung für $s = 0$ die Ableitung für $s = t$ in einem gewissen Sinn bestimmt.

Definition 8.15. Die Lie-Ableitung von $\sigma \in \Gamma((TM)^{\otimes h})$ durch $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist das Tensorfeld

$$(\mathcal{L}_X\sigma)(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \Big(\big((\Phi^s_X)^*\sigma\big)(p)\Big) \in (T_pM)^{\otimes h}. \tag{8.9}$$

Eine ähnliche Definition gilt für $\sigma \in \Gamma((T^*M)^{\otimes k})$. △

Satz 8.16. *Es sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Die Abbildung*

$$\mathcal{L}_X : \Gamma((TM)^{\otimes h}) \to \Gamma((TM)^{\otimes h})$$

ist wohldefiniert und $\mathbb{R}$-linear. Für alle $\sigma_1 \in \Gamma((TM)^{\otimes h_1})$ und $\sigma_2 \in \Gamma((TM)^{\otimes h_2})$ gilt die Leibniz-Regel

$$\mathcal{L}_X(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = (\mathcal{L}_X\sigma_1) \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes (\mathcal{L}_X\sigma_2). \tag{8.10}$$

Schließlich gilt die Formel:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t}(\Phi_X^s)^*\sigma\right) = (\Phi_X^t)^*(\mathcal{L}_X\sigma). \tag{8.11}$$

Daher haben wir die Äquivalenz:

$$\mathcal{L}_X\sigma = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sigma \textit{ ist } \Phi_X\textit{-invariant.}$$

Ähnliche Aussagen gelten für $\Gamma((T^*M)^{\otimes k})$.

Beweis. Zu zeigen, dass $\mathcal{L}_X$ wohldefiniert ist, sollte man zeigen, dass die Ableitung in (8.9) für alle $p \in M$ existiert und, dass $\mathcal{L}_X\sigma$ glatt ist. Das folgt aus der Leibniz-Regel (8.10) und der entsprechenden Aussage für Vektorfelder und 1-Formen, die im Satz 8.21 und Satz 8.22 bewiesen werden.

Die Leibniz-Regel folgt aus $(\Phi_X^s)^*(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = (\Phi_X^s)^*(\sigma_1) \otimes (\Phi_X^s)^*(\sigma_2)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\Big((\Phi_X^s)^*(\sigma_1 \otimes \sigma_2)\Big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\Big((\Phi_X^s)^*(\sigma_1) \otimes (\Phi_X^s)^*(\sigma_2)\Big) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}(\Phi_X^s)^*(\sigma_1)\right) \otimes (\Phi_X^0)^*(\sigma_2) + (\Phi_X^0)^*(\sigma_1) \otimes \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}(\Phi_X^s)^*(\sigma_2)\right) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}(\Phi_X^s)^*(\sigma_1)\right) \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}(\Phi_X^s)^*(\sigma_2)\right).
\end{aligned}$$

Die Gleichung (8.11) folgt aus (8.7) und der Identität $(\Phi_X^s \circ \Phi_X^t)^* = (\Phi_X^t)^* \cdot (\Phi_X^s)^*$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t}\big((\Phi_X^s)^*\sigma\big)(p)\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\big((\Phi_X^{s+t})^*\sigma\big)(p)\right) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\big((\Phi_X^s \circ \Phi_X^t)^*\sigma\big)(p)\right) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\big((\Phi_X^t)^*(\Phi_X^s)^*\sigma\big)(p)\right) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\big((\mathrm{d}\Phi_X^t)^{\otimes h}\big)^{-1} \cdot \big((\Phi_X^s)^*\sigma\big)(\Phi_X^t(p))\right) \\
&= (\mathrm{d}_p\Phi_X^t)^{\otimes h})^{-1} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\big((\Phi_X^s)^*\sigma\big)(\Phi_X^t(p))\right) \\
&= \big((\mathrm{d}_p\Phi_X^t)^{\otimes h})^{-1} \cdot (\mathcal{L}_X\sigma\big)(\Phi_X^t(p))) \\
&= \big((\Phi_X^t)\big)^*(\mathcal{L}_X\sigma)(p).
\end{aligned}$$

□

Wir berechnen die Lie-Ableitung von Funktionen.

Satz 8.17. *Es sei Φ ein Fluß auf M mit Vektorfeld X. Dann*

$$\mathcal{L}_X f = \mathrm{d}f \cdot X, \qquad \forall\, f \in C^\infty(M).$$

Beweis. Es gilt

$$(\mathcal{L}_X f)(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f \circ \Phi_p(t) = \mathrm{d}_{\Phi_p(0)} f \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Phi_p(t) \right) = \mathrm{d}_p f \cdot X(p). \qquad \square$$

Definition 8.18. Es sei $\mathcal{D}(M)$ der Raum der Derivationen auf $C^\infty(M)$. Das heißt: die Elemente $D \in \mathcal{D}(M)$ sind $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, die die Leibniz-Regel erfüllen:

$$D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g), \qquad \forall\, f, g \in C^\infty(M). \qquad \triangle$$

Folgerung 8.19. *Die Abbildung $\mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}(M)$, $X \mapsto \mathcal{L}_X$ ist linear und injektiv.*

Beweis. Die Linearität ist klar. Es sei X mit $\mathcal{L}_X f = 0$ für alle $f \in C^\infty(M)$. Es sei $p \in M$ beliebig und $\varphi = (x^1, \ldots, x^m) : U \to V$ eine Karte um p. Es gibt eine Umgebung $U' \subset U$ von p und eine Funktion $\tilde{x}^i \in C^\infty(M)$, sodass $\tilde{x}^i = x^i$ auf U'. Dann $0_p = \mathcal{L}_X \tilde{x}^i(p) = \mathrm{d}_p \tilde{x}^i(X(p)) = \mathrm{d}_p x^i(X(p))$. Wir haben daher

$$X(p) = \sum_{i=1}^m \mathrm{d}_p x^i(X(p)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^i} = 0_p. \qquad \square$$

Bemerkung 8.20. Man kann zeigen, dass die Abbildung $\mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}(M)$ auch surjektiv ist. Daher können wir $\mathfrak{X}(M)$ mit dem Raum der Derivationen auf $C^\infty(M)$ identifizieren, genau wie wir T_pM mit dem Raum der Derivationen auf $C_p^\infty M$ identifiziert haben. $\triangle$

Wir berechnen nun die Lie-Ableitung von Vektorfeldern.

Satz 8.21. *Es seien X und Y Vektorfelder auf M. Dann ist $\mathcal{L}_X Y$ ein glattes Vektorfeld. Wenn $\varphi = (x^1, \ldots, x^m) : U \to V$ eine Karte ist und wir die Darstellungen in Koordinaten*

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = \sum_{i=1}^m Y^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

haben, dann bekommen wir die Darstellung in Koordinaten

$$\mathcal{L}_X Y = \sum_{i=1}^m \left(\mathrm{d}Y^i \cdot X - \mathrm{d}X^i \cdot Y \right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^i}. \tag{8.12}$$

Eine äquivalente kompaktere Schreibweise, wenn $\tilde{X}, \tilde{Y}, \widetilde{\mathcal{L}_X Y} : V \to \mathbb{R}^m$ die Darstellungen von X, Y und $\mathcal{L}_X Y$ auf V sind, ist

$$\widetilde{\mathcal{L}_X Y} = \mathrm{d}\tilde{Y} \cdot \tilde{X} - \mathrm{d}\tilde{X} \cdot \tilde{Y}.$$

Schließlich sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung und $X', Y' \in \mathfrak{X}(N)$, sodass X F-verwandt mit X' und Y F-verwandt mit Y' sind. Dann ist $\mathcal{L}_X Y$ F-verwandt mit $\mathcal{L}_{X'} Y'$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Bedingung über F-verwandte Vektorfelder. Nach Satz 8.12 gilt $\Phi^s_{X'} \circ F = F \circ \Phi^s_X$. Wir nehmen das Differential davon:

$$\mathrm{d}_{F(p)}\Phi^s_{X'} \cdot \mathrm{d}_p F = \mathrm{d}_{\Phi^s_X(p)} F \cdot \mathrm{d}_p \Phi^s_X.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_p F \cdot (\mathcal{L}_X Y(p)) = \mathrm{d}_p F \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{s=0} (\mathrm{d}_p \Phi^s_X)^{-1} \cdot Y(\Phi^s_X) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{s=0} \mathrm{d}_p F \cdot (\mathrm{d}_p \Phi^s_X)^{-1} \cdot Y(\Phi^s_X(p)) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{s=0} (\mathrm{d}_{F(p)}\Phi^s_{X'})^{-1} \cdot \mathrm{d}_{\Phi^s_X(p)} F \cdot Y(\Phi^s_X(p)) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{s=0} (\mathrm{d}_{F(p)}\Phi^s_{X'})^{-1} Y'(F(\Phi^s_X(p))) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{s=0} (\mathrm{d}_{F(p)}\Phi^s_{X'})^{-1} Y'(\Phi^s_{X'}(F(p))) \\
&= (\mathcal{L}_{X'} Y')(F(p)).
\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\mathcal{L}_X Y$ wohldefiniert und glatt ist. Es sei dafür (U, φ) eine Karte von M. Die lokale Darstellungen $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ sind dann φ-verwandt zu X und Y. Der erster Teil des derzeitigen Beweises zeigt dann, dass $\mathcal{L}_X Y$ wohldefiniert und glatt auf U genau dann, wenn $\mathcal{L}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ wohldefiniert und glatt auf V. Es sei dafür $\Phi_{\tilde{X}} : (-\epsilon, \epsilon) \times V_0 \to V$ der Fluß von $\tilde{X}$. Wir setzen

$$A : (-\epsilon, \epsilon) \times V_0 \to GL_m(\mathbb{R}), \qquad A(s, p) := \mathrm{d}_p \Phi^s_{\tilde{X}},$$

wobei wir die lineare Abbildung $\mathrm{d}_p \Phi^s_X$ mit ihrer Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasis identifizieren. Dann

$$A(0, p) = I_m, \qquad \frac{\partial A}{\partial s}(0, p) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \mathrm{d}_p \Phi^s_{\tilde{X}} = \mathrm{d}_p \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \Phi^s_{\tilde{X}} = \mathrm{d}_p \tilde{X},$$

wobei I_m die Identitätsmatrix ist. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{X}} \tilde{Y} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} A(s, p)^{-1} \cdot \tilde{Y}(\Phi^s_{\tilde{X}}(p)) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} A(-s, \Phi^s_{\tilde{X}}(p)) \cdot \tilde{Y}(\Phi^s_{\tilde{X}}(p)) \\
&= \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} A(-s, \Phi^s_{\tilde{X}}(p))\Big) \cdot \tilde{Y}(\Phi^0_{\tilde{X}}(p)) + A(-0, \Phi^0_{\tilde{X}}(p)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \tilde{Y}(\Phi^s_{\tilde{X}}(p)) \\
&= \Big(- \frac{\partial A}{\partial s}(0, p) + \frac{\partial A}{\partial x}(0, p) \cdot \tilde{X}(p)\Big) \cdot \tilde{Y}(p) + I_m \cdot \mathrm{d}_p \tilde{Y} \cdot \tilde{X}(p) \\
&= -\mathrm{d}_p \tilde{X} \cdot \tilde{Y}(p) + \mathrm{d}_p \tilde{Y} \cdot \tilde{X}(p),
\end{aligned}$$

wo wir benutzt haben, dass $(\mathrm{d}_p \Phi^s_X)^{-1} = \mathrm{d}_{\Phi^s_X(p)} \Phi^{-s}_X$ nach Folgerung 8.9 und dass

$$\frac{\partial A}{\partial x}(0, p) = \frac{\partial I_m}{\partial x} = 0.$$

□

Im nächsten Satz betrachten wir die Lie-Ableitung von kovarianten Tensoren.

Satz 8.22 (nicht Klausurrelevant)**.** *Es sei $\sigma \in \Omega^1(M)$ eine 1-Form und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld. Dann ist $\mathcal{L}_X\sigma$ wohldefiniert und gilt die Formel*

$$(\mathcal{L}_X\sigma)(Y) = \mathcal{L}_X\big(\sigma(Y)\big) - \sigma(\mathcal{L}_X Y), \qquad \forall\, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Wenn $\sigma = \sum_{i=1}^m \sigma_i \mathrm{d}x^i$ und $X = \sum_{i=1}^m X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ die Darstellungen in einer Karte sind, dann

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\sigma &= \sum_{i=1}^m \Big(\mathrm{d}\sigma_i \cdot X + \sum_{j=1}^m \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\sigma_j\Big)\mathrm{d}x^i \\ &= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m \Big(X^j \frac{\partial \sigma_i}{\partial x^j} + \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\sigma_j\Big)\mathrm{d}x^i.\end{aligned}$$

Für allgemeine kovarianten Tensorfelder $\sigma \in \Gamma(T^*M^{\otimes k})$ gilt

$$\iota_Y(\mathcal{L}_X\sigma) = \mathcal{L}_X\big(\iota_Y\sigma\big) - \iota_{\mathcal{L}_X Y}\sigma, \qquad \forall\, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

wobei ι die Einsatzung von Vektoren bezeichnet.

Beweis. Für alle $p \in M$ ist die Abbildung $t \mapsto (\Phi_X^t)^*\sigma(p)$ definiert und glatt in einer Umgebung von $t = 0$. Die Glattheit folgt aus der Glattheit der Koeffizienten bezüglich eines Rahmens $\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^m$ um p (prüfen Sie das). Wir lassen p aus der Notation weg und schreiben

$$\begin{aligned}\big((\Phi_X^t)^*\sigma\big)(Y) &= \big((\Phi_X^t)^*\sigma\big)(Y - (\Phi_X^t)^*Y) + \big((\Phi_X^t)^*\sigma\big)((\Phi_X^t)^*Y) \\ &= \big((\Phi_X^t)^*\sigma\big)(Y - (\Phi_X^t)^*Y) + (\Phi_X^t)^*\big(\sigma(Y)\big) \\ &= a(t)\cdot b(t) + c(t),\end{aligned}$$

wobei $a(t) := (\Phi_X^t)^*\sigma$, $b(t) := Y - (\Phi_X^t)^*Y$ und $c(t) := (\Phi_X^t)^*(\sigma(Y))$. Wir haben $b(0) = 0$ und die Funktionen a, b und c sind glatt (die Glattheit von b und c folgt aus Satz 8.17 und Satz 8.21). Wir nehmen die Ableitung für $t = 0$ und finden aus Satz 8.17 und Satz 8.21, dass

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(\Phi_X^t)^*\sigma\Big)(Y) = \dot a(0)\cdot b(0) + a(0)\cdot \dot b(0) + \dot c(0) &= a(0)\cdot\dot b(0) + \dot c(0) \\ &= \sigma\cdot\big(-\mathcal{L}_X Y\big) + \mathcal{L}_X(\sigma(Y)).\end{aligned}$$

Für die Formel in Koordinaten nehmen wir $Y = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Für kovariante Tensorfelder höherer Stufe benutzen wir die Leibniz-Regel (8.10) und die Tatsache, dass jedes solche Tensorfeld sich lokal auf U als eine Summe von Termen derart $\alpha\otimes\sigma'$ schreiben lässt, wobei $\alpha \in \Omega^1(U)$ und $\sigma' \in \Gamma(T^*M^{\otimes(k-1)})$:

$$\begin{aligned}\iota_Y(\mathcal{L}_X(\alpha\otimes\sigma')) &= \iota_Y((\mathcal{L}_X\alpha)\otimes\sigma' + \alpha\otimes\mathcal{L}_X\sigma') \\ &= ((\mathcal{L}_X\alpha)(Y))\otimes\sigma' + \alpha(Y)\otimes\mathcal{L}_X\sigma' \\ &= \mathcal{L}_X(\alpha(Y))\otimes\sigma' - \alpha(\mathcal{L}_X)\otimes\sigma' + \alpha(Y)\otimes\mathcal{L}_X\sigma') \\ &= \mathcal{L}_X(\alpha(Y)\otimes\sigma') - \alpha(\mathcal{L}_X)\otimes\sigma' \\ &= \mathcal{L}_X(\iota_Y(\alpha\otimes\sigma')) - \iota_{\mathcal{L}_X Y}(\alpha\otimes\sigma').\end{aligned}$$

□

8.4 Die Lie-Klammer und der Kommutator von Flüßen

Der vorherige Satz liefert ein Produkt auf dem Raum der Vektorfelder auf M.

Definition 8.23. Wir definieren die Lie-Klammer als

$$[\cdot\,,\cdot\,] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \qquad [X,Y] := \mathcal{L}_X Y. \qquad \triangle$$

Wir untersuchen nun die algebraischen Eigenschaften der Lie-Klammer.

Satz 8.24. *Die Lie-Klammer*

(i) ist $\mathbb{R}$-bilinear;

(ii) ist antisymmetrisch:

$$[X,Y] = -[Y,X], \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M);$$

(iii) genügt der Jacobi-Identität:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0, \qquad \forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Es gilt die Leibniz-Regel für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$[X, fY] = (\mathcal{L}_X f)\cdot Y + f[X,Y], \quad [fX, Y] = -(\mathcal{L}_Y f)\cdot X + f[X,Y], \qquad \forall\, f \in C^\infty(M).$$

Außerdem ist die Lie-Ableitung von $[X,Y]$ auf dem Raum der glatten Funktionen der Kommutator der Lie-Ableitungen von X und Y

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X \quad \text{auf } C^\infty(M), \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{8.13}$$

Wenn $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$ eine Karte ist, gilt

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0, \qquad \forall\, i, j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Beweis. Die Eigenschaft 1 und 2 und das Verschwinden der Lie-Klammer von Koordinatenvektorfelder folgen unmittelbar aus Satz 8.21. Die Leibniz-Regel wurde in Satz 8.16 gezeigt. Wir verbinden nun den Kommutator und der Lie-Klammer. Es sei $f \in C^\infty(M)$. Wir berechnen die rechte Seite von (8.13) in p. Wir benutzen dafür eine Karte φ um p:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y f - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X f &= \mathcal{L}_X\Big(\sum_{i=1}^m Y^i \cdot \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\Big) - \mathcal{L}_Y\Big(\sum_{i=1}^m X^i \cdot \frac{(\partial f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\Big)\\
&= \sum_{i=1}^m (\mathrm{d}Y^i\cdot X)\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m X^jY^i\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i\partial x^j}\\
&\quad - \sum_{i=1}^m (\mathrm{d}X^i\cdot Y)\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i} - \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m X^iY^j\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i\partial x^j}\\
&= \sum_{i=1}^m \Big((\mathrm{d}Y^i\cdot X)\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i} - (\mathrm{d}X^i\cdot Y)\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\Big)\\
&= \mathcal{L}_{[X,Y]}f,
\end{aligned}$$

wobei wir die folgenden zwei Eigenschaften benutzt haben: den Satz von Schwarz, der besagt, dass für glatte Funktionen g auf offenen Teilmengen des euklidischen Raums $\frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^j \partial x^i}$; die Darstellung von $\mathcal{L}_{[X,Y]}$ in Koordinaten aus Satz 8.21.

Wir zeigen nun die Jacobi-Identität. Nach der Folgerung 8.19 genügt es zu zeigen, dass die Lie-Ableitung, die zu der linken Seite assoziiert ist, verschwindet auf $C^\infty(M)$. Wir benutzen dafür (8.13) und berechnen die einzelnen Lie-Ableitungen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[X,[Y,Z]]} &= \mathcal{L}_X \mathcal{L}_{[Y,Z]} - \mathcal{L}_{[Y,Z]} \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_Z - \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Z \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_Z \mathcal{L}_X + \mathcal{L}_Z \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \\
\mathcal{L}_{[Y,[Z,X]]} &= \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_{[Z,X]} - \mathcal{L}_{[Z,X]} \mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_Z \mathcal{L}_X - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Z - \mathcal{L}_Z \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Z \mathcal{L}_Y \\
\mathcal{L}_{[Z,[X,Y]]} &= \mathcal{L}_Z \mathcal{L}_{[X,Y]} - \mathcal{L}_{[X,Y]} \mathcal{L}_Z = \mathcal{L}_Z \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Z \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X - \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_Z + \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Z .
\end{aligned}$$

Das Summieren der rechten Seiten ergibt dann null. □

Aufgabe 8.25. Zeigen Sie: die Jacobi-Identität ist gleichbedeutend mit

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \quad \text{auf } \mathfrak{X}(M), \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M). \qquad \triangle$$

Aufgabe 8.26. Es sei Φ ein Fluß. Zeigen Sie: Wenn die Vektorfelder X und Y Φ-invariant sind, ist auch das Vektorfeld $[X, Y]$ Φ-invariant. △

Satz 8.27. *Es seien X und Y Vektorfelder auf M. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $[X, Y] = 0_{TM}$*;*

(ii) Y *ist* Φ_X*-invariant;*

(iii) X *ist* Φ_Y*-invariant;*

(iv) für alle $p \in M$ *und alle* $s, t \in \mathbb{R}$*, sodass* $\Phi_Y^{t'}(p) \in \mathcal{U}_X^s$ *für alle* t' *im Intervall zwischen* 0 *und* t*, gilt* $\Phi_X^{s'}(p) \in \mathcal{U}_Y^t$ *für alle* s' *in Intervall zwischen* 0 *und* s *und*

$$\Phi_X^s \circ \Phi_Y^t(p) = \Phi_Y^t \circ \Phi_X^s(p). \tag{8.14}$$

Wenn Φ_X *und* Φ_Y *vollständig sind, sind insbesondere die obigen Bedingungen gleichbedeutend mit*

$$\Phi_X^s \circ \Phi_Y^t = \Phi_Y^t \circ \Phi_X^s, \qquad \forall\, s, t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) wurde schon im Satz 8.16 gezeigt. Da wir $[X, Y] = -[Y, X]$ nach Satz 8.24.(ii) haben, sehen wir, dass (i) und (iii) auch äquivalent sind. Wir zeigen nun, dass (iv) und (ii) äquivalent sind. Es sei angenommen, dass (iv) gilt. Es sei $s \in \mathbb{R}$ beliebig und $p \in \mathcal{U}_X^s$. Für $t > 0$ klein genug ist auch $\Phi_Y^{t'}(p) \in \mathcal{U}_X^s$, da $\mathcal{U}_X^s$ offen und Φ_Y stetig ist. Dann leiten wir die Formel in (8.14) nach t' für $t' = 0$ ab und wir bekommen

$$\mathrm{d}_p \Phi_X^s \cdot Y(p) = Y(\Phi_X^s(p)).$$

Also ist Y Φ_X-invariant und (ii) ist somit gezeigt.

Umgekehrt sei nun angenommen, dass Y Φ_X-invariant ist. Wir nehmen $p \in M$, $s, t \in \mathbb{R}$, sodass $\Phi_Y^{t'}(p) \in \mathcal{U}_X^s$ für alle t' im Intervall zwischen 0 und t. Die Φ_X-Invarianz von Y heißt, dass $Y|_{\mathcal{U}_X^s}$ ist Φ_X^s-verwandt mit Y. Die Voraussetzung über s und t sagt uns, dass $(p,t) \in \mathcal{U}_{Y|_{\mathcal{U}_X^s}}$. Wir können daher Folgerung 8.12 benutzen, wobei die Rollen von F, X_M, X_N in der Notation jenes Satzes nun von $\Phi_X^s : \mathcal{U}_X^s \to M$, $Y|_{\mathcal{U}_X^s}$ und Y gespielt werden. Es folgt, dann $\Phi_X^s \circ \Phi_Y^t(p) = \Phi_Y^t \circ \Phi_X^s(p)$, wie gewünscht. □

Bemerkung 8.28. Die Bedingung in (iv), dass $\Phi_Y^{t'}(p) \in \mathcal{U}_X^s$ für alle t' im Intervall zwischen 0 und t, ist wesentlich. Es gibt nämlich Beispiele von Vektorfelder X, Y mit $[X,Y] = 0_{TM}$ aber trotzdem $\Phi_Y^t \circ \Phi_X^s(p) \neq \Phi_X^s \circ \Phi_Y^t(p)$ für eine gewisse Wahl von s, t und p. Man kann also sich vorstellen, dass das Verschwinden der Lie-Klammer gleichbedeutend mit der lokalen Kommutativität der Flüßen aber die Flüße dürfen global nicht kommutieren. Auf ähnlicher Weise werden wir sehen, dass das Verschwinden der Krümmung eines Zusammenhangs auf einem Vektorbündel die lokale Existenz von einem parallelen Rahmen sichert aber nicht die globale Existenz. △

Wir haben soeben bemerkt, dass das Verschwinden der Lie-Klammer gleichbedeutend mit der lokalen Kommutativität der Flüßen. Wenn die Lie-Klammer nicht verschwindet, kann man immer noch die Lie-Klammer benutzen, um zu messen, wie sehr die zwei Flüßen lokal nicht kommutieren. Das ist der Inhalt folgendes Satzes.

Satz 8.29. *Es seien $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, wobei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ ist. Für alle $p \in U$ existiert ein $\epsilon > 0$, sodass für alle $(x,y) \in (-\epsilon,\epsilon)^2$ die linke Seite unten wohldefiniert ist und es gilt*

$$\Phi_Y^{-y} \circ \Phi_X^{-x} \circ \Phi_Y^{y} \circ \Phi_X^{x}(p) = p + xy[X,Y]_p + \Delta_p(x,y), \tag{8.15}$$

wobei $\Delta_p : (-\epsilon,\epsilon)^2 \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung ist, sodass

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\Delta_p(x,y)}{x^2+y^2} = 0.$$ □

Aufgabe 8.30. Beweisen Sie den Satz 8.29. Hinweis: berechnen Sie die Taylor-Entwicklung der zweiten Ordnung der linken Seite von (8.15) in $(x,y) = 0$ △

Es seien nun X, Y zwei Vektorfelder mit $[X,Y] = 0_{TM}$. Dann nach der Bedingung (iii) im obigen Satz, kommutieren Φ_X^s und Φ_Y^t um jeden Punkt $p \in M$ für hinreichend kleine s und t. Also verhalten sich diese zwei Flüße wie die Flüße der Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^i}$ und $\frac{\partial}{\partial x^j}$ einer Karte $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$.

Bemerkung 8.31. Es kann jedoch passieren, dass $[X,Y] = 0_{TM}$ und trotzdem Φ_X^s und Φ_Y^t kommutieren für bestimmte (nicht kleine) Werte von s und t (siehe Aufgabe 11-3). △

Umgekehrt wollen wir zeigen, dass wir eine Karte um p konstruieren können, sodass X und Y Koordinatenvektorfelder sind, sobald $[X,Y] = 0_{TM}$ und die Tangentialvektoren $X(p)$ und $Y(p)$ linear unabhängig sind. Wir können sogar jede Anzahl $X_1, \ldots, X_k$ von linear unabhängigen Vektorfeldern nehmen, sodass alle die Lie-Klammer $[X_i, X_j]$ verschwinden.

Satz 8.32. *Es seien* $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ *mit*

$$[X_i, X_j] = 0_{TM}, \qquad \forall\, i, j \in \{1, \dots, k\}.$$

Es sei $p_0 \in M$*, sodass* $X_1(p_0), \dots, X_k(p_0) \in T_{p_0}M$ *linear unabhängig sind. Dann gibt es eine Karte* (U, φ) *um* p_0 *mit*

$$X_i|_U = \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \forall\, i = 1, \dots, m.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst eine Karte $\psi = (y^1, \dots, y^m) : U' \to V'$ um p_0 und setzen $q_0 := \psi(p_0)$. Wir haben die lokalen Darstellungen $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k$ der Vektorfelder, sodass $[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = 0$. Nach der linearen Unabhängigkeit von $\tilde{X}_1(q_0), \dots \tilde{X}_k(q_0)$ können wir $v_{k+1}, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ finden, sodass $\tilde{X}_1(q_0), \dots, \tilde{X}_k(q_0), v_{k+1}, \dots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^m$ bilden. Bis auf einem linearen Koordinatenwechsel dürfen wir annehmen, dass $v_i = \frac{\partial}{\partial y^i}|_{y=q_0}$. Wir betrachten dann die Zerlegung $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$, sodass $q_0 = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$. Wir setzen $F : (-\epsilon, \epsilon)^k \times B_r(q_2) \to V$, wobei

$$F(x^1, \dots, x^k, q) = \Phi^{x^1}_{\tilde{X}_1} \circ \dots \circ \Phi^{x^k}_{\tilde{X}_k}\big((q_1, q)\big), \qquad \forall\, (x^1, \dots, x^k, q) \in (-\epsilon, \epsilon)^k \times B_r(q_2).$$

Für r und ϵ klein genug ist diese Abbildung wohldefiniert, da die Flüße stetig sind und lokal eine gleichmäßige Existenzdauer haben. Wir benutzen die Notation $x = (x^1, \dots, x^k)$ für einen Punkt in $(-\epsilon, \epsilon)^k$ und wollen nun zeigen, dass

(i) die ersten k Koordinatenvektoren F-verwandten mit $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k$ sind:

$$\mathrm{d}_{(x,q)}F \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} = \tilde{X}_i(F(x, q)), \qquad \forall\, (x, q) \in (-\epsilon, \epsilon)^k \times B_r(q_2);$$

(ii) die Einschränkung von F auf einem kleineren $(-\epsilon' - \epsilon')^k \times B_{r'}(q_2)$ ein Diffeomorphismus auf das Bild ist.

Wenn das gewährleistet werden kann, ist $\varphi := F^{-1} \circ \psi$ die gewünschte Karte. Die Eigenschaft (i) folgt denn die Flüße nach Satz 8.27 kommutieren und wir können $\Phi^{x^i}_{\tilde{X}_i}$ nach vorne schieben:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{(x,q)}F \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial F}{\partial x^i}\Big|_{(x,q)} &= \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\Phi^{x^i}_{\tilde{X}_i} \circ \Phi^{x^1}_{\tilde{X}_1} \circ \dots \Phi^{x^{i-1}}_{\tilde{X}_1} \circ \Phi^{x^{i+1}}_{\tilde{X}_1} \circ \dots \circ \Phi^{x^k}_{\tilde{X}_k}(q_1, q)\Big) \\
&= \tilde{X}_i\Big(\Phi^{x^i}_{\tilde{X}_i} \circ \Phi^{x^1}_{\tilde{X}_1} \circ \dots \Phi^{x^{i-1}}_{\tilde{X}_1} \circ \Phi^{x^{i+1}}_{\tilde{X}_1} \circ \dots \circ \Phi^{x^k}_{\tilde{X}_k}(q_1, q)\Big) \\
&= \tilde{X}_i(F(x, q)).
\end{aligned}$$

Um (ii) zu beweisen, benutzen wir den Satz von der Umkehrabbildung. Die Voraussetzungen jenes Satzes sind, dass $\mathrm{d}_{(0,q_2)}F$ ein linearer Isomorphismus ist. Wir haben schon berechnet, dass $\mathrm{d}_{(0,q_2)}F \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} = \tilde{X}_i(F(0, q_2)) = \tilde{X}_i(q_0)$. Wir berechnen nun

$$\mathrm{d}_{(0,q_2)}F \cdot \frac{\partial}{\partial q^i} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\Big|_{(0,q_2)} = \frac{\partial F(0, \cdot)}{\partial q^i}\Big|_{q_2} = \frac{\partial (q_1, q)}{\partial q^i}\Big|_{q_2} = \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{q_0}.$$

Laut Voraussetzung bildet $\mathrm{d}_{(0,q_2)}F$ eine Basis von $\mathbb{R}^m$ auf eine Basis von $\mathbb{R}^m$ und ist somit ein linearer Isomorphismus. □

Folgerung 8.33. *Es sei $X \in \mathfrak{X}(M)$, sodass $X(p) \neq 0_p$. Dann existiert eine Karte (U, φ) um p, sodass $X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}$.*

9 Kovariante Ableitung auf Vektorbündeln

9.1 Motive und Definition

Im Abschnitt 6 haben wir Vektorbündel $\pi : E \to M$ eingeführt, die über bestimmten offenen Mengen U, welche M überdecken, wie den trivialen Bündel $U \times \mathbb{R}^h \to U$ aussehen. Wir haben dazu den Raum $\Gamma(E)$ der glatten Schnitten $\sigma : M \to E$ des Vektorbündels π betrachtet. Da π trivial über U ist, lässt $\sigma|_U$ sich in der Trivialisierung $\chi : E_U \to U \times \mathbb{R}^h$ als den Graph $\Gamma_{F_{\chi,\sigma}} = \chi \circ \sigma : U \to U \times \mathbb{R}^h$ einer glatten Funktion $F_{\chi,\sigma} : U \to \mathbb{R}^h$ ausdrücken.

Wir wollen einen Sinn zu der Ableitung $\nabla\sigma$ eines Schnittes $\sigma \in \Gamma(E)$ geben. Das heißt:

$$\forall\, p \in M,\ \forall\, v \in T_pM, \quad \nabla_v\sigma \in E_p \quad \textit{stellt die Ableitung von } \sigma \textit{ in Richtung } v \textit{ an } p \textit{ dar.}$$

Im Abschnitt 4.4 haben wir diese Aufgabe schon für das Bündel $M \times \mathbb{R} \to M$ gelöst und zwar haben wir gesehen, dass jeder Tangentialvektor $v \in T_pM$ eine Richtungsableitung

$$C^\infty(M) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \mathrm{d}_p f \cdot v$$

bestimmt. Die Richtungsableitung ist eine Derivation auf dem Raum $C^\infty(M)$. Das heißt: sie ist ein lineares Funktional auf $C^\infty(M)$, welches die Leibniz-Regel

$$\mathrm{d}_p(fg) \cdot v = (\mathrm{d}_p f \cdot v) g(p) + f(p) \mathrm{d}_p g \cdot v$$

erfüllt. Außerdem für alle $f \in C^\infty(M)$ liefert $v \mapsto \mathrm{d}_p f \cdot v$ ein Bündelhomomorphismus $TM \to M \times \mathbb{R}$. Anders gesagt ist $\mathrm{d}f \in \Gamma(T^*M \otimes (M \times \mathbb{R}))$. Die gesuchte Ableitung auf $\Gamma(E)$ sollte daher die folgende Definition erfüllen.

Definition 9.1. Eine kovariante Ableitung (oder Zusammenhang) auf einem Vektorbündel $\pi : E \to M$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\nabla : \Gamma(E) \to \mathrm{Hom}(TM; E) \cong \Gamma(T^*M \otimes E),$$

die die Leibniz-Regel erfüllt

$$\nabla(f\sigma) = (\mathrm{d}f) \otimes \sigma + f \nabla\sigma, \qquad \forall\, f \in C^\infty(M),\ \sigma \in \Gamma(E). \tag{9.1}$$

Also für alle $p \in M$ haben wir die lineare Abbildung

$$T_pM \to E_p, \qquad v \mapsto \nabla_v\sigma, \quad \forall\, v \in T_pM$$

und die Leibniz-Regel lässt sich darstellen als

$$\nabla_v(f\sigma) = (\mathrm{d}_p f \cdot v)\sigma(p) + f(p)\nabla_v\sigma. \qquad \triangle$$

Wir schreiben $\Gamma(E; \nabla) := \{\sigma \in \Gamma(E) \mid \nabla\sigma = 0\}$ für den Vektorraum der ∇-parallelen Schnitten. Wir schreiben $\mathrm{kA}(E)$ für den Raum der kovarianten Ableitungen auf $\pi : E \to M$.

Bemerkung 9.2. Eine kovariante Ableitung zu geben ist äquivalent nach Satz 6.78, eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E), \qquad (X, \sigma) \mapsto \nabla_X \sigma$$

zu geben, die $C^\infty(M)$-linear im ersten Faktor $\nabla_{fX}\sigma = f\nabla_X\sigma$ ist und die Leibniz-Regel $\nabla_X(f\sigma) = \mathrm{d}f(X)\sigma + f\nabla\sigma$ erfüllt. △

Wir wollen nun eine solche kovariante Ableitung ∇ konstruieren. Wenn $E = M \times \mathbb{R}^h$ trivial ist, dann $\sigma = \Gamma_F$ für $F : M \to \mathbb{R}^h$ und wir setzen einfach

$$\nabla_v \Gamma_F := (p, \mathrm{d}_p F \cdot v). \tag{9.2}$$

Wenn nun E beliebig ist, könnte man versuchen, $\nabla_v\sigma$ durch die Trivialisierung χ zu definieren als

$$\nabla_v^\chi \sigma = \chi^{-1}(p, \mathrm{d}_p F_{\chi,\sigma} \cdot v). \tag{9.3}$$

Allerdings wenn $\chi' : E_{U'} \to U' \times \mathbb{R}^h$ eine andere Trivialisierung ist, stimmen im Allgemein ∇^χ und $\nabla^{\chi'}$ für Schnitte auf $U \cap U'$ nicht überein. Es ist auch nicht möglich für beliebige E nur einige Trivialisierungen χ_i auszusuchen, sodass $\{U_i\}$ die Mannigfaltigkeit M überdecken und gleichzeitig $\nabla^{\chi_i} = \nabla^{\chi_j}$ auf $U_i \cap U_j$ für alle i, j (die Vektorbündel, die das zulassen, sind sehr speziell und heißen flach, da null Krümmung besitzen). Um diese Schwierigkeit zu überwinden werden wir eine Zerlegung der Eins benutzen.

Satz 9.3. *Jedes Vektorbündel $\pi : E \to M$ lässt eine kovariante Ableitung zu.*

Proof. Es sei $\{\chi_i : E_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^h\}$ eine Familie von Trivialisierungen, sodass $\{U_i\}$ die Mannigfaltigkeit M überdeckt. Für jedes i können wir $\nabla^{\chi_i} : \Gamma(E_{U_i}) \to \Gamma(T^*U_i \otimes E_{U_i})$ mit Hilfe der Formel (9.3) definieren. Das ist eine kovariante Ableitung für $\pi|_{U_i} : E_{U_i} \to U_i$. Es sei nun $\{\rho_i\}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich $\{U_i\}$. Dann

$$\sigma \mapsto \rho_i \nabla^{\chi_i}(\sigma|_{U_i}), \qquad \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$$

ist wohldefiniert und $\mathbb{R}$-linear aber keine kovariante Ableitung, da die Leibniz-Regel nicht gilt (prüfen Sie das). Wir setzen nun

$$\sigma \mapsto \sum_{i \in I} \rho_i \nabla^{\chi_i}(\sigma|_{U_i}), \qquad \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E).$$

Da die Überdeckung $\{T(\rho_i)\}$ der Träger lokal endlich ist, ist ∇ wohldefiniert und $\mathbb{R}$-linear. Die ist auch eine kovariante Ableitung, da die Leibniz-Regel gilt:

$$\begin{aligned}\nabla(f\sigma) = \sum_{i \in I} \rho_i \nabla^{\chi_i}((f\sigma)|_{U_i}) &= \sum_{i \in I} \rho_i \mathrm{d}f|_{U_i} \otimes \sigma|_{U_i} + f \sum_{i \in I} \rho_i \nabla^{\chi_i}(\sigma|_{U_i}) \\ &= \Big(\sum_{i \in I} \rho_i\Big) \mathrm{d}f \otimes \sigma + f\nabla\sigma \\ &= \mathrm{d}f \otimes \sigma + f\nabla\sigma.\end{aligned}$$

□

Beispiel 9.4. Es sei $M \to \mathbb{T}^1$ das Möbiusbündel. Für jede $s \in \mathbb{R}$ sei $\chi_s : E_{U_s} \to U_s \times \mathbb{R}$ die Trivialisierung von M, die Sie in Aufgaben 8-1 konstruiert haben. Zeigen Sie, dass

$$\nabla_v \sigma := \chi^{-1}(p, \mathrm{d}_p F_{\chi,\sigma} \cdot), \qquad \forall\, p \in U_s,\ v \in T_p\mathbb{T}^1$$

eine wohldefinierte kovariante Ableitung liefert. △

Bemerkung 9.5. Nach (9.2) sehen wir, dass

$$\mathrm{d}_p F \cdot v = \mathrm{d}_{\Gamma_F(p)} \pi_2 \cdot \mathrm{d}_p \Gamma_F \cdot v, \tag{9.4}$$

wobei $\pi_2 : M \times \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^h$ die kanonische Projektion ist. Das bedeutet, dass $\nabla_v \Gamma_f$ von $\mathrm{d}\Gamma_f \cdot v$ und $\mathrm{d}\pi_2$ bestimmt wird. Ein anderer natürlicher Versuch um eine kovariante Ableitung zu konstruieren wäre die Formel (9.4) nachzuahmen:

$$\nabla_v \sigma = \mathcal{K}_{\sigma(p)} \cdot \mathrm{d}_p \sigma \cdot v, \tag{9.5}$$

wobei $\mathcal{K}$ die Rolle von $\mathrm{d}\pi_2$ spielen sollte. Welche Eigenschaften besitzt $\mathcal{K}$? Es sollte ein Bündelhomomorphism $\mathcal{K} : TE \to \mathcal{V}$ sein, wobei $\mathcal{V}$ die vertikale Distribution vom Beispiel 6.30 und $\mathcal{K}|_{\mathcal{V}} = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$. Dazu muss $\mathcal{K}$ eine gewisse Verträglichkeit mit der faserweise linearen Struktur von E haben, um die Linearität von $\sigma \to \nabla_v \sigma$ zu gewährleisten.

Also ist $\mathcal{K}$ eine lineare Projektion auf die vertikale Distribution $\mathcal{V}$. Als solche wird sie vollständig bestimmt von ihrem Kern $\mathcal{H} := \ker \mathcal{K}$, der sogenannten horizontalen Distribution von $\mathcal{K}$, die

$$TE = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V} \tag{9.6}$$

erfüllt. Umgekehrt liefert jede Distribution $\mathcal{H}$, die (9.6) erfüllt, eine Abbildung $\mathcal{K}$ wie oben.

Es ist ein sehr interessantes Resultat, das wir hier nicht beweisen, dass jede kovariante Ableitung ∇ aus einer mit der linearen Struktur von E verträglichen Projektion $\mathcal{K}$ (oder eine horizontale Distribution $\mathcal{H}$) durch die Formel (9.5) stammt. △

9.2 Der Raum der kovarianten Ableitungen

Kovariante Ableitungen $\nabla : \Gamma(E) \mapsto \Gamma(T^*M \otimes E)$ sind nicht $C^\infty(M)$-linear denn sie erfüllen die Leibniz-Regel. Da der erste Term in (9.1) aber nicht von ∇ abhängt, ist die Differenz von kovarianten Ableitungen $C^\infty(M)$-linear und daher durch einen Schnitt von $T^*M \otimes E^* \otimes E$ darstellbar.

Satz 9.6. *Es seien ∇^1, ∇^2 kovariante Ableitungen auf E. Dann existiert $\omega \in \Gamma(T^*M \otimes E^* \otimes E)$, sodass $\nabla^2 - \nabla^1 = \omega$ (siehe Bemerkung 6.79). Umgekehrt für eine feste kovariante Ableitungen ∇ ist*

$$\nabla^\omega := \nabla + \omega, \qquad \forall\, \omega \in \Gamma(T^*M \otimes \mathrm{End}(E))$$

eine Kovariante Ableitung, wobei $\mathrm{End}(E) = E^* \otimes E$. *Die Zuordnung*

$$\Gamma(T^*M \otimes \mathrm{End}(E)) \to \mathrm{kA}(E), \qquad \omega \mapsto \nabla^\omega$$

der Identität $\nabla^{(\omega_1+\omega_2)} = (\nabla^{\omega_1})^{\omega_2}$ genügt und daher gibt $\mathrm{kA}(E)$ *die Struktur eines affinen Raums über dem Vektorraum $\Gamma(T^*M \otimes E^* \otimes E)$.*

Proof. Wir berechnen

$$\nabla^1(f\sigma) = \mathrm{d}f \otimes \sigma + f\nabla^1\sigma, \qquad \nabla^2(f\sigma) = \mathrm{d}f \otimes \sigma + f\nabla^2\sigma.$$

Wir nehmen die Differenz dieser Gleichung, um die Behauptung zu beweisen. Für die zweite Aussage berechnen wir

$$\nabla^\omega(f\sigma) - \mathrm{d}f \otimes \sigma = \nabla(f\sigma) + \omega(f\sigma) - \mathrm{d}f \otimes \sigma = f\nabla\sigma + f\omega(\sigma) = f(\nabla\sigma + \omega(\sigma)) = f\nabla^\omega\sigma.$$

□

Bemerkung 9.7. Da der Raum $\mathrm{kA}(E)$ der kovarianten Ableitungen affin ist, gilt

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \nabla^1, \nabla^2 \in \mathrm{kA}(E) \quad \Longrightarrow \lambda_1\nabla^1 + \lambda_2\nabla^2 \in \mathrm{kA}(E).$$

Es ist auch klar, dass $\mathrm{kA}(E)$ kein Vektorraum bezüglich der Standardsumme ist, da zum Beispiel $0 \notin \mathrm{kA}(E)$. △

Das obige Resultat sagt uns, dass wir viele Weisen haben, eine Ableitung von Schnitten von E zu definieren. Diese Weisen sind durch $\Gamma(T^*M \otimes \mathrm{End}(E))$ parametrisiert aber nicht auf einer kanonischen Art, da die Parametrisierung von der Wahl eines Ortspunktes ∇ abhängt.

Bemerkung 9.8. Um eine kovariante Ableitung auf E eindeutig zu wählen, müssen wir zusätzliche Eigenschaften von ∇ verlangen. Für die kovariante Ableitung auf TM für M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, das wird durch die Verträglichkeit mit der Metrik und der Lie-Klammer gewährleistet (siehe Abschnitt 10). △

Wir beenden diesen Abschnitt, indem wir das Verhalten von kovarianten Ableitungen durch Bündelhomomorphismen untersuchen.

Satz 9.9. *Es seien $\pi_1 : E_1 \to M$ und $\pi_2 : E_2 \to M$ Vektorbündel und $F : E_1 \to E_2$ und $G : E_2 \to E_1$ Bündelhomomorphismen über M (nämlich $\pi_2 \circ F = \pi_1$ und $\pi_2 \circ G = \pi_1$), sodass $G \circ F = \mathrm{id}_{E_1}$. Dann ist*

$$\mathrm{kA}(E_2) \to \mathrm{kA}(E_1), \qquad \nabla \mapsto G \circ \nabla \circ F$$

ein Homomorphismus von affinen Räumen, wobei

$$(G \circ \nabla) : \Gamma(E_2) \to \Gamma(T^*M \otimes E_1), \qquad (G \circ \nabla)_v\sigma := G\big(\nabla_v\sigma\big).$$

Insbesondere, wenn F ein Isomorphismus und $G = F^{-1}$ ist, bekommen wir den Isomorphismus von affinen Räumen

$$\mathrm{kA}(E_2) \to \mathrm{kA}(E_1), \qquad \nabla \mapsto F^{-1} \circ \nabla \circ F.$$

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass $G \circ \nabla \circ F$ $\mathbb{R}$-linear ist. Die Leibniz-Regel folgt aus

$$\begin{aligned} G \circ \nabla \circ F(f \cdot \sigma) = G \circ \nabla\big(f \cdot (F\sigma)\big) &= G\big(\mathrm{d}f \otimes (F\sigma)\big) + G\big(f \cdot \nabla(F\sigma)\big) \\ &= \mathrm{d}f \otimes G(F(\sigma)) + f \cdot G\big(\nabla \circ F\sigma\big) \\ &= \mathrm{d}f \otimes \sigma + f \cdot G \circ \nabla \circ F\sigma. \end{aligned}$$

Die Kompatibilität mit der affinen Struktur, nämlich $G \circ \nabla^\omega \circ F = \nabla^{G\omega F}$ für alle $\omega \in \Gamma(T^*M \otimes E_2^* \otimes E_2)$, lässt sich auch leicht prüfen. Schließlich ist die Umkehrabbildung von $\nabla \mapsto F \circ \nabla \circ F^{-1}$ durch $\nabla \mapsto F^{-1} \circ \nabla \circ F$ gegeben. □

9.3 Kovariante Ableitungen auf trivialen Bündeln

Nach dem Satz 9.6 lässt sich jede kovariante Ableitung auf $M \times \mathbb{R}^h$ als

$$\nabla\sigma = \mathrm{d}\sigma + \omega \cdot \sigma \tag{9.7}$$

schreiben, wobei wir $\sigma = \Gamma_F$ mit F identifizieren und lassen wir den Punkt p aus der Notation in (9.2) weg. Daher ist $\sigma = (\sigma^k)$ ein Vektor des $\mathbb{R}^h$ und $\omega = (\omega_j^k)$ eine Matrix, deren Einträge 1-Formen auf M sind. Wenn wir mittels der Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^h$ (9.7) angeben, finden wir die 1-Formen

$$(\nabla\sigma)^k = \mathrm{d}\sigma^k + \sum_{j=1}^{h} \sigma^j \omega_j^k, \qquad k = 1, \dots, h. \tag{9.8}$$

Wenn wir dazu eine Karte (U, φ) von M wählen, können wir diese 1-Formen in der Basis $\mathrm{d}x^1, \dots, \mathrm{d}x^m$ schreiben:

$$\omega_j^k = \sum_{i=1}^{m} \omega_{ij}^k \mathrm{d}x^i, \qquad (\nabla\sigma)^k = \sum_{i=1}^{m} \Big(\frac{\partial \sigma^k}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{h} \omega_{ij}^k \sigma^j \Big) \mathrm{d}x^i, \qquad k = 1, \dots, h. \tag{9.9}$$

Bemerkung 9.10. Wir können auf äquivalenter Weise (9.8) und (9.9) die Standardbasis $e_1, \dots, e_h$ von $\mathbb{R}^h$ statt der Koordinaten benutzen, um $\nabla\sigma$ zu schreiben:

$$\nabla\sigma = \sum_{k=1}^{h} \Big(\mathrm{d}\sigma^k + \sum_{j=1}^{h} \omega_j^k \sigma^j \Big) \otimes e_k, \qquad \nabla\sigma = \sum_{k=1}^{h} \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{\partial \sigma^k}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{h} \omega_{ij}^k \sigma^j \Big) \mathrm{d}x^i \otimes e_k. \tag{9.10}$$

Wenn $\sigma = e_j$ für alle $j = 1, \dots, h$ finden wir

$$\nabla e_j = \sum_{k=1}^{h} \omega_i^k \otimes e_k, \qquad \nabla e_j = \sum_{k=1}^{h} \sum_{i=1}^{m} \omega_{ij}^k \mathrm{d}x^i \otimes e_k.$$

Die zweite Gleichung kann auch als

$$\nabla_{\partial_i} e_j = \sum_{k=1}^{m} \omega_{ij}^k e_k, \qquad \forall\, i = 1, \dots, m$$

geschrieben werden. △

Beispiel 9.11. Für $M = \mathbb{R}^2$ und $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ist

$$\omega = \begin{pmatrix} y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y & \cos y \mathrm{d}y \\ x^2 \mathrm{d}x - e^{xy}\mathrm{d}y & \sin(x+y)\mathrm{d}x \end{pmatrix} = \mathrm{d}x \otimes \begin{pmatrix} y & 0 \\ x^2 & \sin(x+y) \end{pmatrix} + \mathrm{d}y \otimes \begin{pmatrix} -x & \cos y \\ -e^{xy} & 0 \end{pmatrix}$$

eine Matrix von Zusammenhangsformen, die eine kovariante Ableitung ∇^ω auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ bestimmt. Was ist $\nabla^\omega_{x\partial_x + y\partial_y}(y^2 e_1 + xy e_2)$? △

9.4 Lokalität von kovarianten Ableitungen

Wir haben kovariante Ableitungen ∇ abstrakt in Definition 9.1 eingeführt und wir prüfen nun, dass sie die Eigenschaften besitzen, die von einer Ableitung zu erwarten sind. Wir wollen auf jeden Fall, dass

(i) ∇ lokal ist: für jede offene Teilmenge $U \subset M$ hängt der Schnitt $(\nabla\sigma)|_U$ nur von $\sigma|_U$ ab (für den Fall von Richtungsableitungen von Funktionen, also das Bündel $M \times \mathbb{R} \to M$, hieß das, dass Richtungsableitungen auf dem Raum von Keimen durch (4.6) wohldefiniert sind);

(ii) ∇ durch ihre Einschränkung auf Kurven bestimmt ist: für $v \in T_pM$ hängt der Wert von $\nabla_v\sigma \in E_p$ nur von der Wert von σ auf einer Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = v$ ab (für den Fall von Richtungsableitungen von Funktionen, also das Bündel $M \times \mathbb{R} \to M$, folgt das aus der Definition der Isomorphismus (4.6)).

Wir fangen an, die Lokalität zu beweisen.

Satz 9.12. *Es sei ∇ eine kovariante Ableitung auf $\pi : E \to M$. Für alle offenen Teilmengen $U \subset M$ gibt es eindeutig eine kovariante Ableitung ∇^U auf $\pi_U : E_U \to U$, sodass*

$$\nabla^U(\sigma|_U) = (\nabla\sigma)|_U, \qquad \forall\, \sigma \in \Gamma(E).$$

Beweis. Es sei zuerst U' eine beliebige offene Menge in M und $p \in U'$. Es sei angenommen, dass σ_1 und σ_2 in $\Gamma(E)$ auf U' übereinstimmen. Dann verschwindet $\tau := \sigma_2 - \sigma_1$ auf U' und wir können $f : M \to \mathbb{R}$ finden, sodass $f(p) = 0$ und $f = 1$ auf $M \setminus U'$. Dann $\tau = f\tau$ und

$$\nabla\sigma_2 - \nabla\sigma_1 = \nabla\tau = \nabla(f\tau) = \mathrm{d}f \otimes \tau + f\nabla\tau.$$

Wir werten diese Gleichung in p auf und sehen, dass da die rechte Seite verschwindet. Also $\nabla\sigma_2(p) = \nabla\sigma_1(p)$.

Wir können dann $\nabla^U\sigma$ für $\sigma \in \Gamma(E_U)$ auf folgender Weise definieren. Für jede $U' \subset M$ offen mit $\bar{U}' \subset U$ existiert $\tilde\sigma_{U'} \in \Gamma(E)$ mit $\sigma|_{U'} = \tilde\sigma_{U'}|_{U'}$ und wir setzen

$$\nabla^U\sigma(p) = \nabla(\tilde\sigma_{U'})(p), \qquad \forall\, p \in U'.$$

Das ist eine gute Definition denn jeder Punkt $p \in U$ in irgendwelcher U' wie oben enthalten ist und wenn $p \in U' \cap U''$ dann $\nabla(\tilde\sigma_{U'})(p) = \nabla(\tilde\sigma_{U''})(p)$ nach dem ersten Teil dieses Beweises. Es ist auch klar, dass $\nabla^U\sigma$ glatt ist, da sie mit $\nabla(\tilde\sigma_{U'}) \in \Gamma(E)$ auf U' übereinstimmt. Die $\mathbb{R}$-linearität und die Leibniz-Regel sind eine Aufgabe für Sie. □

Das obige Resultat sagt uns, dass man lokale Ableitungen lokalisieren kann. Mittels führt das dazu, dass, wenn $\chi : E_U \to U \times \mathbb{R}^h$ eine Trivialisierung ist, wir die kovariante Ableitung auf E_U explizit als

$$\chi\nabla\chi^{-1}\sigma = \mathrm{d}\sigma + \omega^\chi \cdot \sigma, \qquad \forall\, \sigma \in \Gamma(U \times \mathbb{R}^h)$$

schreiben können. Hier erinnern wir uns daran, dass $\omega^\chi = ((\omega^\chi)^k_j)$ eine Matrix mit Einträgen 1-Formen auf U ist. Falls (U, φ) eine Karte auf M ist, haben wir die dazugehörigen Koeffizienten $((\omega^{(\chi,\varphi)})^k_{ij})$ die glatte Funktionen auf U sind.

Definition 9.13. Wir nennen die 1-Formen $(\omega^\chi)^k_j$ auf U die Zusammenhangsformen von ∇ bezüglich der Trivialisierung χ und $(\omega^{(\chi,\varphi)})^k_{ij}$ die Christoffelsymbole von ∇ bezüglich der Trivialisierung χ und der Karte φ. Wenn die Trivialisierung und die Karte klar vom Kontext sind, schreiben wir einfach $\omega^k_i = (\omega^\chi)^k_i$ und $\omega^k_{ij} = (\omega^{(\chi,\varphi)})^k_{ij})$. △

Wie ist die Transformationsregel für die Zusammenhangsformen ω^k_i, wenn wir die Trivialisierung wechseln? Das klärt der nächste Satz.

Satz 9.14. *Es sei ∇ eine kovariante Ableitung auf E und es seien $\chi : E_U \to U \times \mathbb{R}^h$ und $\tilde{\chi} : E_{\tilde{U}} \to \tilde{U} \times \mathbb{R}^h$ Trivialisierung für E mit Übergangsfunktion $A : U \cap \tilde{U} \to GL_h(\mathbb{R})$. Wenn ω^k_j und $\tilde{\omega}^k_j$ die Zusammenhangsformen für χ und $\tilde{\chi}$ sind, gilt dann*

$$A \cdot \omega - \tilde{\omega} \cdot A = \mathrm{d}A, \qquad \textit{auf } \; U \cap \tilde{U}. \tag{9.11}$$

Die (j, ℓ)-Einträge der obigen Matrixgleichung ist die 1-form auf $U \cap \tilde{U}$:

$$\sum_{k=1}^{h} \left(A^j_k \omega^k_\ell - \tilde{\omega}^j_k A^k_\ell \right) = \mathrm{d}A^i_\ell. \tag{9.12}$$

Proof. Nach Voraussetzung für alle $\sigma : U \to \mathbb{R}^h$ und $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^h$ gilt

$$\chi \nabla \chi^{-1} \sigma = \mathrm{d}\sigma + \omega \cdot \sigma, \qquad \tilde{\chi} \nabla \tilde{\chi}^{-1} \tilde{\sigma} = \mathrm{d}\tilde{\sigma} + \tilde{\omega} \cdot \tilde{\sigma}.$$

Es sei nun angenommen, dass $\tilde{\sigma} = A \cdot \sigma$ auf $U \cap \tilde{U}$. Dann berechnen wir $\mathrm{d}\tilde{\sigma} + \tilde{\omega} \cdot \tilde{\sigma}$ zweierlei. Erstens durch Einsetzen von $\tilde{\sigma} = A \cdot \sigma$:

$$\mathrm{d}\tilde{\sigma} + \tilde{\omega} \cdot \tilde{\sigma} = A \cdot \mathrm{d}\sigma + \mathrm{d}A \cdot \sigma + \tilde{\omega} \cdot A \cdot \sigma.$$

Zweitens mittels

$$\mathrm{d}\tilde{\sigma} + \tilde{\omega} \cdot \tilde{\sigma} = \tilde{\chi} \nabla \tilde{\chi}^{-1} \tilde{\sigma} = \tilde{\chi} \chi^{-1} (\chi \nabla \chi^{-1} \sigma) = A \cdot (\mathrm{d}\sigma + \omega \cdot \sigma).$$

Das Vergleichen von der rechten Seiten und die Tatsache, dass σ beliebig ist, impliziert die gewünschte Transformationsregel. □

9.5 Pull-Back von kovarianten Ableitungen

Wir zeigen nun, dass ∇ durch ihre Einschränkung auf Kurven bestimmt ist. Wir werden das folgern, aus der Tatsache, dass wenn $\mathcal{P}_F(\pi) : \mathcal{P}_F(E) \to L$ das Pull-Back Bündel durch eine glatte Abbildung $F : L \to M$ ist, dann es auch eine Pull-Back kovariante Ableitung $\mathcal{P}_F(\nabla)$ auf $\mathcal{P}_F(E)$ gibt, die verträglich mit dem Zurückziehen von Schnitten ist.

Satz 9.15. *Es sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel und $\nabla \in \mathrm{kA}(E)$. Für jede glatte Abbildung $F : L \to M$ existiert eindeutig eine kovariante Ableitung $\mathcal{P}_F(\nabla) \in \mathrm{kA}(\mathcal{P}_F(E))$, sodass*

$$\mathcal{P}_F(\nabla)_u(\sigma \circ F) = \nabla_{\mathrm{d}_q F \cdot u} \sigma \in \mathcal{P}_F(E)_q \cong E_{F(q)}, \qquad \forall\, q \in L, \; \forall\, u \in T_q L, \tag{9.13}$$

wobei wir $\mathcal{P}_F(E)_q$ mit $E_{F(q)}$ nach (6.5) identifiziert haben.

Wenn ω_j^k die Zusammenhangsformen für ∇ bezüglich eines Rahmens $e_1, \ldots, e_h$ von π auf $U \subset M$ sind, sind dann die Pull-Back Formen $F^*\omega_j^k$ im Sinne von Definition 7.7 die Zusammenhangsformen für $\mathcal{P}_F(\nabla)$ bezüglich des Rahmens $e_1 \circ F, \ldots, e_h \circ F$ von $\mathcal{P}_F(\pi)$ auf $F^{-1}(U) \subset L$.

Beweis. Wir nehmen eine offene Menge U von M, sodass E einen Rahmen $(e_j)_{j=1,\ldots,h}$ auf U zulässt. Es seien (ω_j^k) die Zusammenhangsformen von ∇ bezüglich des Rahmens $e_1, \ldots, e_h$:

$$\nabla e_j = \sum_{k=1}^{h} \omega_j^k \otimes e_k, \qquad \forall\, j = 1, \ldots, h.$$

Nun liefert das Pull-Back einen Rahmen $(e_j \circ F)$ von F^*E auf der offenen Menge $F^{-1}(U)$. Wenn wir die linke Seite der Gleichung (9.13) für $\sigma = \sum_{j=1}^{h} f^j e_j \in \Gamma(E_U)$ berechnen, sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_F(\nabla)_u(\sigma \circ F) &= \sum_{j=1}^{h} \mathcal{P}_F(\nabla)_u\big(f^j \circ F)(e_j \circ F)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{h} (\mathrm{d}_{F(q)} f^j \cdot \mathrm{d}_q F \cdot u) \cdot e_j(F(q)) + f^j(F(q)) \cdot \mathcal{P}_F(\nabla)_u(e_j \circ F).
\end{aligned}$$

Wenn wir nun die rechte Seite berechnen, finden wir

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathrm{d}_q F \cdot u} \sigma &= \sum_{j=1}^{h} (\mathrm{d}_{F(q)} f^j \cdot \mathrm{d}_q F \cdot u) \cdot e_j(F(q)) + f^j(F(q)) \nabla_{\mathrm{d}_q F \cdot u} e_j \\
&= \sum_{j=1}^{h} (\mathrm{d}_{F(q)} f^j \cdot \mathrm{d}_q F \cdot u) \cdot e_j(F(q)) + \sum_{k=1}^{h} f^j(F(q))(\omega_j^k \cdot \mathrm{d}_q F \cdot u) e_k(F(q)) \\
&= \sum_{j=1}^{h} (\mathrm{d}_{F(q)} f^j \cdot \mathrm{d}_q F \cdot u) \cdot e_j(F(q)) + \sum_{k=1}^{h} f^j(F(q))(F^*\omega_j^k \cdot u)(e_k \circ F)(q).
\end{aligned}$$

Also die Gleichung (9.13) stimmt genau dann, wenn die Zusammenhangsformen von $\mathcal{P}_F(\nabla)$ bezüglich des Rahmens $e_1 \circ F, \ldots, e_h \circ F$ gleich $F^*\omega_j^k$ sind. Da U eine beliebige trivialisierende offene Teilmenge von M ist, folgt somit die Eindeutigkeit von $\mathcal{P}_F(\nabla)$.

Für die Existenz definieren wir für alle trivialisierende offene Menge U die kovariante Ableitung $\mathcal{P}_F(\nabla)|_{F^{-1}(U)}$ als die einzige kovariante Ableitung auf $E_{F(U)}$, die die Zusammenhangsformen $F^*\omega_j^k$ bezüglich des Rahmens $e_1 \circ F, \ldots, e_h \circ F$ besitzt. Die Existenz von $\mathcal{P}_F(\nabla)$ auf $\mathcal{P}_F(E)$ ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass für jedes Paar von trivialisierenden offenen Mengen $\mathcal{P}_F(\nabla)|_{F^{-1}(\tilde{U})}$ und $\mathcal{P}_F(\nabla)|_{F^{-1}(U)}$ auf $F^{-1}(U) \cap F^{-1}(\tilde{U}) = F^{-1}(U \cap \tilde{U})$ übereinstimmen. Das ist klar, weil die Einschränkungen von beiden kovarianten Ableitungen auf $F^{-1}(U \cap \tilde{U})$ der Formel (9.13) genügen und deswegen sind gleich nach der schon bewiesenen Eindeutigkeit überein. $\square$

Bemerkung 9.16. Die Existenz folgt auch aus der Tatsache, dass $F^*\omega_j^k$ und $F^*\tilde{\omega}_j^k$ die Transformationsregel (9.12) mit Übergangsfunktion $A \circ F$ erfüllen. Diese Aussage lässt sich beweisen, indem man das Pull-Back durch F der Transformationregel (9.12) zwischen ω_j^k und $\tilde{\omega}_j^k$ mit Übergangsfunktion A nimmt. $\triangle$

Wenn $v \in T_pM$ und $F = \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, $t \mapsto \gamma(t)$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v$, dann liefert der obige Satz

$$\mathcal{P}_F(\nabla)_{\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0}}(\sigma \circ \gamma) = \nabla_v \sigma \in \mathcal{P}_F(E)_0 \cong E_{\gamma(0)}.$$

Das heißt: die rechte Seite hängt nur von $\sigma \circ \gamma$ ab und wir haben den folgenden Satz bewiesen.

Satz 9.17. *Eine kovariante Ableitung ∇ für $E \to M$ ist eindeutig bestimmt durch ihre Einschränkung $\mathcal{P}_\gamma(\nabla)$ auf allen glatten Kurven $\gamma : (a, b) \to M$. Wenn ω die Matrix der Zusammenhangsformen von ∇ auf U ist, dann ist $\mathrm{d}t \otimes \zeta$ die Matrix der Zusammenhangsformen für $\mathcal{P}_\gamma(\nabla)$ auf $\gamma^{-1}(U)$, wobei $\zeta := \omega(\dot{\gamma}) : \gamma^{-1}(U) \to \mathfrak{gl}_h(\mathbb{R})$.* $\square$

9.6 Einschränkung von kovarianten Ableitungen auf Kurven und die Parallelverschiebung

Es sei $E \to M$ ein Vektorbündel und $\nabla \in \mathrm{kA}(E)$. Wir wollen nun den Vektorraum $\Gamma(E; \nabla)$ der ∇-parallelen Schnitte von E untersuchen. Wenn $\nabla = \mathrm{d}$ das Differential auf dem trivialen Bündel $M \times \mathbb{R}^h$ ist, sind ∇-parallele Schnitte Funktionen, die auf jeder Zusammenhangskomponente von M konstant sind. Insbesondere wenn M zusammenhängend ist, gilt $\Gamma(M \times \mathbb{R}^h; \mathrm{d}) \cong \mathbb{R}^h$.

Umgekehrt wenn ∇ einen Rahmen $e_1, \ldots, e_h$ von parallelen Schnitten auf U zulässt, ist ∇ in der entsprechenden Trivialisierung durch das Differential d dargestellt (auf äquivalenter Weise die Zusammenhangsformen verschwinden). Denn wenn $\sigma = \sum_{i=1}^h f^i e_i$, dann

$$\nabla\sigma = \sum_{i=1}^h \nabla(f^i e_i) = \sum_{i=1}^h (\mathrm{d}f_i \otimes e_i + f_i \nabla e_i) = \sum_{i=1}^h \mathrm{d}f_i \otimes e_i.$$

Allerdings werden wir sehen, dass für viele kovarianten Ableitungen lokale ∇-parallele Rahmen um $p \in M$ existieren nicht. Man kann sich vorstellen, dass solche kovariante Ableitungen gekrümmt sind, wobei wir den Begriff von Krümmung für kovarianten Ableitungen im nächsten Abschnitt einführen werden.

Hier bemerken wir, dass es sogar passieren kann, dass für jede offene Umgebung U von $p \in M$ der Vektorraum $\Gamma(E_U; \nabla|_U)$ trivial ist (insbesondere existiert kein ∇-paralleler Rahmen). Wenn $\varphi = (x^1, \ldots, x_m) : U \to V$ eine Karte ist, haben wir die Äquivalenz

$$\nabla\sigma = 0 \quad \text{auf} \quad U \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\sigma = 0, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, m. \tag{9.14}$$

Es sei nun $F_\sigma : V \to \mathbb{R}^h$ die Darstellung von σ bezüglich eines Rahmens von E_U. Das heißt: $\sigma = \sum_{k=1}^h F_\sigma^k e_h$. Dann lässt sich die rechte Seite von (9.14) als ein System von m

linearen partiellen Differentialgleichungen auf der offenen Menge $V = \varphi(U)$ von $\mathbb{R}^m$ für die unbekannte Vektorfunktion F_σ umschreiben:

$$\forall\, i = 1, \ldots, m, \quad \frac{\partial F_\sigma}{\partial x^i} + \zeta_i \cdot F_\sigma = 0, \qquad \text{wobei} \quad \zeta_i := \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) : V \to \mathfrak{gl}_h(\mathbb{R}). \tag{9.15}$$

Insbesondere impliziert die i-te Gleichung, dass die Einschränkung von σ auf der i-ten Koordinatenkurve durch jeden $q \in U$

$$\gamma_i(t) := \Big(x^1(t) = x^1(q), \cdots, x^i(t) = x^i(q) + t, \cdots, x^m(t) = x^m(q)\Big)$$

$(\gamma_i^* \nabla)$-parallel ist. Wir fangen deswegen an, parallele Schnitte für Vektorbündel über einem Intervall (a, b) zu studieren.

9.6.1 Vektorbündel über einem Intervall

Es sei $E \to (a, b)$ ein Vektorbündel über einem Intervall, das wir durch die Variabel t parametrisieren. Es sei dazu $\nabla \in \mathrm{kA}(E)$ und $e_1, \ldots, e_h$ ein Rahmen für E auf dem Subintervall $(a', b') \subset (a, b)$. Wenn wir nun (9.14) und (9.15) für $\sigma \in \Gamma(E_{(a',b')})$ benutzen sehen wir, dass

$$\nabla\sigma = 0 \quad \text{auf} \quad (a', b') \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}F_\sigma}{\mathrm{d}t} + \zeta \cdot F_\sigma = 0, \qquad \zeta := \omega\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big).$$

Die Gleichung auf der rechten Seite ist eine lineare gewöhnlichen Differentialgleichung mit zeitabhängiger Koeffizientenmatrix $\zeta : (a', b') \to \mathfrak{gl}_h(\mathbb{R})$. Wir können unser Wissen über solche Gleichungen von der Analysis I-II-III benutzen, um das folgende Resultat zu beweisen.

Folgerung 9.18. *Es sei $E \to (a, b)$ ein Vektorbündel und $\nabla \in \mathrm{kA}(E)$ eine kovariante Ableitung auf E. Für alle $t_0 \in (a, b)$ ist die Abbildung*

$$\Gamma(E; \nabla) \to E_{t_0}, \qquad \sigma \mapsto \sigma(t_0)$$

ein linearer Isomorphismus und wir schreiben die Umkehrabbildung als $e \mapsto \sigma_e$. Insbesondere wenn die Elemente $e_1, \ldots, e_h$ eine Basis von E_{t_0} bilden, ist $\sigma_{e_1}, \ldots, \sigma_{e_h}$ ein ∇-paralleler Rahmen auf (a, b).

Beweis. Was wir zeigen müssen ist, dass für $t_0 \in (a, b)$ und $e_0 \in E_{t_0}$ ein eindeutiger ∇-paralleler Schnitt σ_{e_0} auf (a, b) mit $\sigma_{e_0}(t_0) = e_0$ existiert. Wir betrachten zu diesem Zweck $\chi : E_{(a,b')} \to (a', b') \times \mathbb{R}^h$ eine Trivialisierung um t_0. Wir setzen $(t_0, \eta_0) := \chi(e_0)$. Es sei $F_{\eta_0} : (a', b') \to \mathbb{R}^h$ die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot F_{\eta_0}(t) = -\zeta(t) \cdot F_{\eta_0}(t), \\ F_{\eta_0}(t_0) = \eta_0. \end{cases}$$

Die Tatsache, dass die maximale Lösung auf dem ganzen Intervall (a', b') definiert ist, sollte aus Analysis I-II-III bekannt sein. Dann $\sigma'_{e_0} := \chi^{-1}(F_{\eta_0})$ ist der eindeutige ∇-parallele Schnitt auf (a', b'), sodass $\sigma'_{e_0}(t_0) = e_0$.

Wir bemerken nun, dass wenn (a_1, b_1) und (a_2, b_2) Subintervalle von (a, b) mit $t_0 \in (a_3, b_3) := (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ sind und $\sigma_1 \in \Gamma(E_{(a_1,b_1)}; \nabla)$ und $\sigma_2 \in \Gamma(E_{(a_2,b_2)}; \nabla)$ mit $\sigma_1(t_0) = e_0 = \sigma_2(t_0)$, dann $\sigma_1 = \sigma_2$ auf (a_3, b_3). Wir haben das Argument schon im Satz 8.4 gesehen. Die Menge $\{\sigma_1 = \sigma_2\}$ enthält t_0 und ist abgeschlossen, da E hausdorffsch ist. Die Menge ist auch offen. Wenn $\sigma_1(t') = \sigma_2(t')$ gilt, dann, nach dem ersten Teil dieses Beweises mit t' statt t_0, stimmen σ_1 und σ_2 auf einem kleinen Intervall um t', wo E trivial ist. Da (a_3, b_3) zusammenhängend ist, gilt $\{\sigma_1 = \sigma_2\} = (a_3, b_3)$.

Es gibt daher eindeutig ein paralleler Schnitt $\sigma_{e_0} : (a_{\max}, b_{\max}) \to E$ mit $\sigma_{e_0}(t_0) = e_0$, der auf einem maximalen Subintervall $(a_{\max}, b_{\max})$ von (a, b) definiert ist. Wir sind fertig, wenn wir zeigen, dass $a_{\max} = a$ und $b = b_{\max}$. Hier spielt die Linearität der Differentialgleichung eine entscheidende Rolle. Wenn, zum Beispiel, $b_{\max} < b$, dann können wir eine Trivialisierung χ auf $(b_{\max} - \delta, b_{\max} + \delta)$ nehmen. Nach dem ersten Teil dieses Beweises existiert eindeutig ein paralleler Schnitt τ auf $(b_{\max} - \delta, b_{\max} + \delta)$ mit $\tau(b_{\max} - \delta/2) = \sigma_{e_0}(b_{\max} - \delta/2)$. Daher $\tau = \sigma_{e_0}$ auf $(b_{\max} - \delta, b_{\max})$ und wir können τ und σ_{e_0} zusammenkleben, um einen parallelen Schnitt $\tilde{\sigma}$ mit $\tilde{\sigma}(t_0) = e_0$ auf $(a_{\max}, b_{\max} + \delta)$ zu konstruieren. Dieser Widerspruch zeigt $b_{\max} = b$. $\square$

Wenn wir zwei Punkte t_0 und t_1 auf (a, b) feststellen, können wir den obigen Satz benutzen um Elementen in E_{t_0} auf Elementen in E_{t_1} parallel zu verschieben.

Definition 9.19. Die Parallelverschiebung $P_{t_1,t_0} : E_{t_0} \to E_{t_1}$ ist der linearer Isomorphismus $P_{t_1,t_0}(e) := \sigma_e(t_1)$ für alle $e \in E_{t_0}$, wobei $\sigma_e \in \Gamma(E; \nabla)$ mit $\sigma_e(t_0) = e$. $\triangle$

Bemerkung 9.20. Es gelten die Eigenschaften

$$P_{t_0,t_0} = \mathrm{Id}_{E_{t_0}}, \qquad P_{t_2,t_1} \circ P_{t_1,t_0} = P_{t_2,t_0}, \qquad \forall\, t_0, t_1, t_2 \in (a, b).$$

Es folgt daraus, dass

$$P_{t_1,t_0}^{-1} = P_{t_0,t_1}, \qquad \forall\, t_0, t_1 \in (a, b). \qquad \triangle$$

Wir erwarten, dass die Parallelverschiebung wichtige Informationen über die kovariante Ableitung enthält. Wir machen diese Intuition präzis, indem wir zeigen, dass eigentlich die Parallelverschiebung die kovariante Ableitung bestimmt.

Satz 9.21. *Es sei $E \to (a, b)$ und $\nabla \in \mathrm{kA}(E)$. Es sei $\sigma \in \Gamma(E)$ gegeben. Dann*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t_0}} \sigma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} P_{t_0,t} \cdot \sigma(t).$$

Insbesondere bestimmen die Parallelverschiebungen P_{t_1,t_0} für alle $t_0, t_1 \in (a, b)$ die kovariante Ableitung ∇ vollständig.

Beweis. Es sei $(e_j(t_0))$ eine Basis von E_{t_0}. Dann ist $(e_j(t) := P_{t,t_0} e_j(t_0))$ ein paralleler glatter Rahmen auf (a, b). Daher existieren glatte Koeffizienten $f^j : (a, b) \to \mathbb{R}$, sodass

$\sigma = \sum_{j=1}^h f^j e_j$. Es gilt

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_t|_{t_0}} \sigma = \sum_{j=1}^h \nabla_{\partial_t|_{t_0}} f^j e_j = \sum_{j=1}^h \dot{f}^j(t_0) e_j(t_0) + f^j(t_0) \nabla_{\partial_t|_{t_0}} e_j &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} \Big(\sum_{j=1}^h f^j(t) e_j(t_0) \Big) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} \Big(\sum_{j=1}^h f^j(t) P_{t_0,t} e_j(t) \Big) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} P_{t_0,t} \Big(\sum_{j=1}^h f^j(t) e_j(t) \Big) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} P_{t_0,t} \cdot \sigma(t). \qquad \square\end{aligned}$$

9.6.2 Beliebige Vektorbündel

Es sei nun $E \to M$ ein Vektorbündel über eine beliebige Mannigfaltigkeit und $\nabla \in \mathrm{kA}(E)$. Wenn $\gamma : (a,b) \to M$ eine glatte Kurve ist, können wir das eingeschränkte Vektorbündel $\mathcal{P}_\gamma(E) \to (a,b)$ und die eingeschränkte kovariante Ableitung $\mathcal{P}_\gamma(\nabla) \in \mathrm{kA}(\mathcal{P}_\gamma(E))$ betrachten. Wir können nun die obige Diskussion auf diese Einschränkungen anwenden und somit die Parallelverschiebung entlang der Kurve γ definieren. Manchmal ist es aber flexibler mit stückweise glatten Kurven zu arbeiten, die wir nun einführen.

Definition 9.22. Es sei $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ eine stetige Kurve. Die Kurve heißt glatt, wenn es $\tilde{\gamma} : (t_0 - \epsilon, t_1 + \epsilon) \to M$ mit $\gamma = \tilde{\gamma}|_{[t_0,t_1]}$ existiert. Die Kurve heißt stückweise Glatt, wenn γ die Verkettung von glatten Kurven $\gamma_i : [s_i, s_{i+1}] \to M$ für $i = 1, \dots, k$. Eine Umparametrisierung von γ ist eine Kurve $\tilde{\gamma} : [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1] \to M$, sodass $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$, wobei $\tau : [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1] \to [t_0, t_1]$ ein stückweise glatter Diffeomorphismus ist. Die Umparametrisierung heißt orientierungserhaltend, wenn $\tau(\tilde{t}_0) = t_0$ und $\tau(\tilde{t}_1) = t_1$ und orientierungsumkehrend, wenn $\tau(\tilde{t}_1) = t_0$ und $\tau(\tilde{t}_0) = t_1$. △

Definition 9.23. Es sei $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ eine glatte Kurve. Die Parallelverschiebung $P^\gamma_{t_1,t_0} : E_{\gamma(t_0)} \to E_{\gamma(t_1)}$ entlang der Kurve γ ist der lineare Isomorphismus $P_{t_1,t_0} : \mathcal{P}_\gamma(E)_{t_0} \to \mathcal{P}_\gamma(E)_{t_1}$ von der Definition 9.19 bezüglich $\mathcal{P}_\gamma(\nabla)$. Wenn γ nur stückweise glatt ist, ist die Parallelverschiebung $P^\gamma_{t_1,t_0} : E_{\gamma(t_0)} \to E_{\gamma(t_1)}$ als die Verkettung der Parallelverschiebungen entlang der glatten Stücken der Kurve definiert. △

Bemerkung 9.24. Die Parallelverschiebung hängt von der Umparametrisierung nicht, da das Pullback durch die Umparametrisierung parallele Schnitte auf parallele Schnitte sendet. Genauer gesagt, wenn $\tilde{\gamma}$ orientierungserhaltend, beziehungsweise orientierungsumkehrend, Umparametrisierung gilt

$$P^{\tilde{\gamma}}_{\tilde{t}_1,\tilde{t}_0} = P^\gamma_{t_1,t_0}, \qquad P^{\tilde{\gamma}}_{\tilde{t}_1,\tilde{t}_0} = \big(P^{\tilde{\gamma}}_{t_1,t_0}\big)^{-1}.$$

Dagegen ,wenn $p_0, p_1 \in M$, hängt die Parallelverschiebung $P^\gamma_{1,0} : T_{p_0}M \to T_{p_1}M$ von der Kurve $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = p_0$ und $\gamma(1) = p_1$ ab. Das hat im Prinzip zwei

Grunde. Einer ist geometrisch: ∇ ist gekrümmt auf M (Fall der Sphäre in Aufgabe 13-2). Einer ist topologisch: auch wenn ∇ nicht gekrümmt ist, könnten zwei solche Kurven, die nicht homotopisch miteinander sind, unterschiedliche Parallelverschiebungen haben (Fall der Kegel in Aufgabe 13-1). $\triangle$

Folgerung 9.25. *Es sei $\nabla \in \mathrm{kA}(E)$. Es seien dazu $\sigma \in \Gamma(E)$, $p \in M$ und $v \in T_pM$ beliebig. Für alle $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v$ gilt*

$$\nabla_v \sigma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} P^{\gamma}_{0,t}(\sigma \circ \gamma)(t) \in \mathcal{P}_F(E)_0 \cong E_{\gamma(0)}.$$

Die Parallelverschiebungen $P^{\gamma}_{t_1,t_0}$ für alle $\gamma : (a,b) \to M$ und $t_0, t_1 \in (a,b)$ bestimmen die kovariante Ableitung ∇ vollständig. $\square$

Folgerung 9.26. *Es sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $E \to M$ ein Vektorbündel. Für alle $\nabla \in \mathrm{kA}(E)$ und alle $p \in M$ ist die lineare Abbildung*

$$\Gamma(E; \nabla) \to E_p, \qquad \sigma \mapsto \sigma(p)$$

injektiv.

Beweis. Es sei $\sigma \in \ker\big(\Gamma(E;\nabla) \to E_p\big)$. Wir wissen also, dass $\sigma(p) = 0$ und wollen wir schließen, dass $\sigma(p') = 0$ für alle $p' \in M$. Da M zusammenhängend ist, existiert eine stückweise glatte Kurve $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = p'$. Nach 9.15 ist σ parallel entlang γ. Da $\sigma(\gamma(0)) = \sigma(p) = 0$ folgt aus der Eindeutigkeit der Parallelverschiebung, dass $0 = \sigma(\gamma(1)) = \sigma(p')$. $\square$

9.7 Die Krümmung

Wir kommen nun zu der Frage zurück, ob wir für $E \to M$ und $\nabla \in \mathrm{kA}(E)$ lokal um einen Punkt $p \in M$ einen ∇-parallelen Schnitt σ mit $\sigma(p) \neq 0$ finden können. Es sei dafür $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^m))$ eine Karte um p, sodass $\varphi(p) = 0$. Wir benutzen unten die Notation $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Wir nehmen $e \in E_p$ und wir verschieben e parallel entlang der ersten Koordinatenkurve $t_1 \mapsto \gamma(t_1) := \varphi^{-1}(t_1, 0, \ldots, 0)$ durch p. Wir gewinnen somit einen Schnitt σ^1_e, der parallel entlang γ_1 ist, also

$$\nabla_{\partial_1} \sigma^1_e = 0. \tag{9.16}$$

Wir betrachten nun die Einparameterschar von zweiten Koordinatenkurven, die durch die Punkte von γ_1 laufen:

$$\gamma_{t_1}(t_2) = \varphi^{-1}(t_1, t_2, 0, \ldots, 0).$$

Wir konstruieren dann eine Schar σ_{t_1} von parallelen Schnitten entlang γ_{t_1}, sodass $\sigma_{t_1}(0) = \sigma^1_e(t_1)$. Da σ_{t_1} eine Differentialgleichung, die glatt vm Parameter t_1 abhängt, ist $\sigma^2_e(t_0, t_1) = \sigma_{t_1}(t_2)$ ein Schnitt entlang der Unterfläche $(t_1, t_2) \mapsto \gamma^2(t_1, t_2) := \gamma_{t_1}(t_2)$. Es ist aber nicht klar, dass σ_e^2 parallel ist. Nach Konstruktion ist σ^2 entlang der Kurven γ_{t_1} parallel, das heißt

$$\nabla_{\partial_2}\sigma_e^2 = 0.$$

Um das Verhalten von $\nabla_{\partial_1}\sigma_e^2$ zu untersuchen, nehmen wir die kovariante Ableitung $\nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1}\sigma_e^2$ entlang der Kurven γ_{t_1}. Wenn wir annehmen, dass die kovariante Ableitungen ∇_{∂_1} und ∇_{∂_2} kommutieren, also

$$\nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1}\sigma_e^2 = \nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_2}\sigma_e^2,$$

bekommen wir

$$\nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1}\sigma_e^2 = \nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_2}\sigma_e^2 = \nabla_{\partial_2}0 = 0.$$

Also wäre $\nabla_{\partial_1}\sigma_e^2$ ein paralleler Schnitt entlang γ_{t_1}. Aber für $t_2 = 0$ haben wir

$$\nabla_{\partial_1|_{t_2=0}}\sigma_e^2 = \nabla_{\partial_1}\sigma_e^1 = 0.$$

Nach der Eindeutigkeit der Parallelverschiebung muss deshalb $\nabla_{\partial_1}\sigma_e^2$ über der ganzen Subfläche gelten.

Man kann nun dem gleichen Verfahren folgen und eine Zweiparameterschar von dritten Koordinatenkurven γ_{t_1,t_2} und Parallelverschiebungen σ_{t_1,t_2} entlang γ_{t_1,t_2} mit $\sigma_{t_1,t_2}(0) = \sigma^2(t_1,t_2)$ betrachten. Die dazugehörige glatte Schnitt entlang dem Unterraum $(t_1,t_2,t_3) \to \gamma^3$. Das ist parallel genau dann, wenn

$$\nabla_{\partial_3}\nabla_{\partial_1}\sigma_e^3 = \nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_3}\sigma_e^3, \qquad \nabla_{\partial_3}\nabla_{\partial_2}\sigma_e^3 = \nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_3}\sigma_e^3.$$

Wenn wir dieses Verfahren für $\sigma_e^3, \ldots, \sigma_e^m =: \sigma_e$ iterieren, bekommen wir das folgende Resultat.

Satz 9.27. *Es sei angenommen, dass die Bedingungen*

$$\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\sigma = \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\sigma, \qquad \forall\, i,j = 1,\ldots,m, \qquad \forall\, \sigma \in \Gamma(E_U) \tag{9.17}$$

gelten. Dann existiert für alle $e \in E_p$ ein ∇-paralleler Schnitt σ_e mit $\sigma_e(p) = e$ auf einer offenen Umgebung von p. Nach Folgerung 9.26 existiert ein ∇-paralleler Rahmen auf U. □

Die Bedingungen in (9.17) sind äquivalent zum

$$\sigma \to \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\sigma - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\sigma = 0, \qquad \forall\, i,j = 1,\ldots,m.$$

Wir möchten nun diese Bedingungen ohne Bezug zu den Koordinatenvektorfelder ∂_i schreiben. Wir suchen daher einen Schnitt $R(\cdot,\cdot)\sigma \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \times E)$, sodass

$$R(\partial_i,\partial_j)\sigma = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\sigma - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\sigma \tag{9.18}$$

(siehe Bemerkung 6.79). Der erste Versuch würde $R(X,Y)\sigma$ als $\nabla_X\nabla_Y\sigma - \nabla_Y\nabla_X\sigma$ zu setzen. Diese Abbildung ist aber nicht $C^\infty(M)$-linear in X:

$$\begin{aligned}
\nabla_{fX}\nabla_Y\sigma - \nabla_Y\nabla_{fX}\sigma &= f\nabla_X\nabla_Y\sigma - \mathcal{L}_Y f\cdot\nabla_X\sigma - f\nabla_Y\nabla X\sigma \\
&= f(\nabla_X\sigma - \nabla_Y\nabla_X\sigma) - \nabla_{(L_Y f)X}\sigma \\
&= f(\nabla_X\sigma - \nabla_Y\nabla_X\sigma) - \nabla_{\mathcal{L}_Y(fX)-f\mathcal{L}_Y X}\sigma \\
&= f(\nabla_X\sigma - \nabla_Y\nabla_X\sigma) - f\nabla_{[X,Y]}\sigma + \nabla_{[fX,Y]}\sigma.
\end{aligned}$$

Diese Identität kann allerdings als

$$\nabla_{fX}\nabla_Y\sigma - \nabla_Y\nabla_{fX}\sigma - \nabla_{[fX,Y]}\sigma = f(\nabla_X\sigma - \nabla_Y\nabla_X\sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma)$$

umgeschrieben werden. Also ist $\nabla_X\nabla_Y\sigma - \nabla_Y\nabla_X\sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma$ $C^\infty(M)$-linear in X. Die Antisymmetrie sagt uns, dass solche Abbildung auch $C^\infty(M)$-linear in Y ist. Diese Abbildung erfüllt (9.18), da $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Wir setzen also

$$R(X,Y)\sigma := \nabla_X\nabla_Y\sigma - \nabla_Y\nabla_X\sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma, \qquad \forall\, X,Y \in \mathfrak{X}(M),\ \forall\, \sigma \in \Gamma(E). \tag{9.19}$$

Wir wollen nun $R(X,Y)f\sigma$ berechnen:

$$\nabla_X\nabla_Y(f\sigma) = \nabla_X(\mathcal{L}_Y f\sigma) + \nabla_X(f\nabla_Y\sigma) = (\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y f)\sigma + \mathcal{L}_Y f\nabla_X\sigma + \mathcal{L}_X f\nabla_Y\sigma + f\nabla_X\nabla_Y\sigma$$

$$\nabla_Y\nabla_X(f\sigma) = \nabla_Y(\mathcal{L}_X f\sigma) + \nabla_Y(f\nabla_X\sigma) = (\mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X f)\sigma + \mathcal{L}_X f\nabla_Y\sigma + \mathcal{L}_Y f\nabla_X\sigma + f\nabla_Y\nabla_X\sigma$$

$$\nabla_{[X,Y]}(f\sigma) = (\mathcal{L}_{[X,Y]}f)\sigma + f\nabla_{[X,Y]}\sigma.$$

Wir subtrahieren die zweite und dritte Identität von der ersten und wir finden, dass $R(X,Y)f\sigma = fR(X,Y)\sigma$ für alle $f \in C^\infty(M)$, wobei wir benutzt haben, dass die Relation $\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X,Y]}$ nach (8.13) gilt.

Definition 9.28. Es sei $\nabla \in \mathrm{kA}(E)$. Die Krümmung von ∇ ist das Tensorfeld

$$R \in \mathrm{Mult}(TM, TM; \mathrm{End}(E)) \cong \Gamma(T^*M^{\otimes 2} \otimes \mathrm{End}(E)), \qquad (X, Y, \sigma) \mapsto R(X,Y)\sigma,$$

die durch (9.19) definiert wird. Anders gesagt ist die Krümmung R eine bilineare Abbildung zwischen $TM \oplus TM$ und dem Bündel der Endomorphismen $\mathrm{End}(E) = E^* \otimes E$ von E. △

Bemerkung 9.29. Die Krümmung ist antisymmetrisch in der ersten zwei Argumenten

$$R(X,Y)\sigma = -R(Y,X)\sigma, \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Also können wir genauer sagen, dass die Krümmung ein Schnitt des Bündels $\Lambda^2 M \otimes \mathrm{End}(E)$ schreiben, wobei das Symbol $\Lambda^2 M$ in Definition 7.4 eingeführt wurde. △

Definition 9.30. Eine kovariante Ableitung $\nabla \in \mathrm{kA}(E \to M)$ heißt flach um $p \in M$, wenn $R = 0$ in einer Umgebung von p. Eine kovariante Ableitung heißt flach, wenn $R = 0$ auf dem ganzen M. △

Beispiel 9.31. Zeigen Sie, dass der Kegel $K_\alpha := \{(\theta \sin\alpha \cos\varphi, \theta \sin\alpha \sin\varphi, \theta\cos\alpha) \mid (\theta,\varphi) \in (0,\infty) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})\}$ mit der kovarianten Ableitung ∇^{K_α} aus Aufgabe 12-3 flach ist. △

Aus der obigen Überlegungen folgt das nächste wichtige Resultat.

Satz 9.32. *Es sei $\nabla \in \mathrm{kA}(E)$ und $p \in M$. Die folgende drei Eigenschaften sind äquivalent:*

1. *∇ ist flach um p;*
2. *es gibt einen ∇-parallelen Rahmen um p;*
3. *es gibt eine Trivialisierung χ um p, sodass $\chi^{-1}\nabla\chi = \mathrm{d}$ (äquivalent zu $\omega^\chi = 0$).*

Proof. Wenn $R = 0$ in einer Umgebung von p ist, haben wir gesehen, dass ein paralleler Rahmen konstruiert werden kann. Wenn nun $e_1, \dots, e_h$ ein paralleler Rahmen auf einer Umgebung U von p ist, dann gilt

$$R(X,Y)e_i = \nabla_X\nabla_Y e_i - \nabla_Y\nabla_X e_i - \nabla_{[X,Y]}e_i = \nabla_X 0 - \nabla_Y 0 - 0 = 0.$$

Dass 2. und 3. äquivalent sind, ist schon bekannt. □

Folgerung 9.33. *Es sei angenommen, dass es ein ∇-paralleler Rahmen auf U gibt. Es sei $\gamma : [0,1] \to U$ eine stückweise glatte Kurve mit $p' := \gamma(0) = \gamma(1)$. Dann ist $P^\gamma_{1,0} : T_{p'}M \to T_{p'}M$ die Identität. Insbesondere wenn ∇ ist flach um p dann gibt es eine Umgebung U von p, sodass für alle $\gamma : [0,1] \to U$ mit $p' := \gamma(0) = \gamma(1)$ die Eigenschaft $P^\gamma_{1,0} = \mathrm{id}_{p'}M$ gilt.*

Beweis. Da e_i ist ∇-parallel, ist $e_i \circ \gamma$ auch $\mathcal{P}_\gamma(\nabla)$-parallel. Daher $P^\gamma_{1,0}e_i(p) = P^\gamma_{1,0}e_i(\gamma(0)) = e_i(\gamma(1)) = e_i(p)$. Da $(e_i(p))$ eine Basis von E_p ist und $P^\gamma_{1,0}$ linear ist, folgt die Aussage. □

Bemerkung 9.34. Der obige Beweis zeigt, dass die Existenz eines ∇-parallelen Rahmen auf einer offenen Menge U das Verschwinden der Krümmung auf U impliziert (das heißt: ∇ ist flach auf U). Die Umkehrung gilt aber nicht, wie das Beispiel des Kegels verdeutlicht. Das Hindernis zu der Existenz von parallelen Schnitten ist in diesem die Topologie des Kegels, da die Kurve, die einmal um die Scheitel läuft, nicht zusammenziehbar ist. △

Wir haben somit gezeigt, dass $R = 0$ um p impliziert, dass die Parallelverschiebung entlang abgeschlossenen Kurven um p die Identität ist. Der nächste Satz, den wir nicht beweisen, zeigt die Umkehrung und gibt somit noch eine äquivalente Bedingung zur Flachheit um p. Was der Satz intuitiv besagt ist, dass die Krümmung ein Maß für die infinitesimale Abhängigkeit der Parallelverschiebung vom Weg ist. Man sollte diesen Satz mit Satz 8.29 vergleichen, wo die Lie-Klammer sich als ein Maß für die infinitesimale nicht-Kommutativität von zwei Flüssen bewiesen hat.

Satz 9.35. *Es seien $\nabla \in \mathrm{kA}(E)$, einen Punkt $p \in M$ und zwei Tangentialvektoren $u, v \in T_pM$ gegeben. Es sei $\Gamma : (-\epsilon,\epsilon)^2 \to M$, $(x,y) \mapsto \Gamma(x,y)$ eine glatte Abbildung, sodass*

$\Gamma(0,0) = p$ und $\partial_x\Gamma(0,0) = u$ und $\partial_y\Gamma(0,0) = v$. Für alle Punkte $(x,y) \in (-\epsilon,\epsilon)^2$ sei $\gamma_y := \Gamma|_{(-\epsilon,\epsilon)\times\{y\}}$ und $\delta_x := \Gamma|_{x\times(-\epsilon,\epsilon)}$. Dann

$$P^{\delta_0}_{0,y} \cdot P^{\gamma_y}_{0,x} \cdot P^{\delta_x}_{y,0} \cdot P^{\gamma_0}_{x,0} \cdot e = e + xyR(u,v)e + \Delta_e(x,y) \in E_p \qquad \forall\,(x,y) \in (-\epsilon,\epsilon)^2,$$

wobei $\Delta_e : (-\epsilon,\epsilon)^2 \to E_p$ eine glatte Abbildung ist, sodass

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\Delta_e(x,y)}{x^2+y^2}.$$

□

Für explizite Berechnungen leiten wir nun die Darstellung der Krümmung in einer Trivialisierung her. Wir brauchen dafür das äußere Differential von 1-Formen.

9.8 Das äußere Differential von 1-Formen

Definition 9.36. Es sei $\alpha \in \Omega^1(M)$ eine 1-Form. Das äußere Differential $\mathrm{d}\alpha \in \Omega^2(M)$ von α ist definiert durch

$$\mathrm{d}\alpha(X,Y) := \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \mathcal{L}_Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]), \qquad \forall\, X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

△

Hilfsatz 9.37. *Das äußere Differential ist wohldefiniert und genügt der Leibniz-Regel:*

$$\mathrm{d}(f\alpha) = \mathrm{d}f \wedge \alpha + f\mathrm{d}\alpha, \qquad \forall\, f \in C^\infty(M),\ \alpha \in \Omega^1(M).$$

Es seien $x^1,\dots,x^m$ Koordinaten auf $U \subset M$ und $\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathrm{d}x^i \in \Omega^1(U)$. Dann

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{1\le i<j\le m} \Big(\frac{\partial\alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j}\Big)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = \sum_{i=1}^m \mathrm{d}\alpha_i \wedge \mathrm{d}x^i.$$

Außerdem gilt

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0, \qquad \forall\, f \in C^\infty(M).$$

Schließlich kommutiert für alle $F : L \to M$ das Pull-Back mit dem äußeren Differential:

$$F^*(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}(F^*\alpha) \in \Omega^2(L), \qquad \forall\, \alpha \in \Omega^1(M).$$

Proof. Die Wohldefinitheit wird in Aufgabe 13-2 bewiesen. Wir zeigen die Koordinatendarstellungen:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha(\partial_i,\partial_j) = \partial_i(\alpha(\partial_j)) - \partial_j(\alpha(\partial_i)) - \alpha([\partial_i,\partial_j]) &= \partial_i\alpha_j - \partial_j\alpha_i \\ &= \sum_{k=1}^m \mathrm{d}\alpha_k \otimes \mathrm{d}x^k(\partial_i,\partial_j) - \mathrm{d}\alpha_k \otimes \mathrm{d}x^k(\partial_j,\partial_i) \\ &= \sum_{k=1}^m \mathrm{d}\alpha_k \wedge \mathrm{d}x^k(\partial_i,\partial_j).\end{aligned}$$

Das Verschwinden des äußeren Differentials des Differentials einer Funktion, die Leibniz-Regel und die Wirkung des Pull-Back dürfen nun in Koordinaten geprüft werden:

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \sum_{i<j} \Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} f - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} f\Big) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = 0$$

nach dem Lemma von Schwarz;

$$\mathrm{d}(f\alpha) = \sum_{k=1}^m \mathrm{d}(f\alpha_k) \wedge \mathrm{d}x^k = \sum_{k=1}^m \Big(\alpha_k \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^k + f \mathrm{d}\alpha_k \wedge \mathrm{d}x^k\Big) = \mathrm{d}f \wedge \alpha + f\mathrm{d}\alpha$$

nach der Leibniz-Regel für Funktionen;

$$\begin{aligned} F^*(\mathrm{d}\alpha) = \sum_{k=1}^m F^*\mathrm{d}\alpha_k \wedge F^*\mathrm{d}x^k = \sum_{k=1}^m \mathrm{d}(\alpha_k \circ F) \wedge \mathrm{d}(x^k \circ F) &= \mathrm{d}\Big(\sum_{k=1}^m (\alpha_k \circ F)\mathrm{d}(x^k \circ F)\Big) \\ &= \mathrm{d}\Big(\sum_{k=1}^m (\alpha_k \circ F)\mathrm{d}x^k \cdot \mathrm{d}F\Big) \\ &= \mathrm{d}(F^*\alpha) \end{aligned}$$

nach (7.2), der Eigenschaft $\mathrm{d}(\mathrm{d}x^k \circ F) = 0$ und der Definition 7.7 von Pull-Back. □

9.9 Die Darstellung der Krümmung in einer Trivialisierung

Satz 9.38. *Es sei $\nabla \in \mathrm{kA}(E)$ und $\chi : E_U \to U \times \mathbb{R}^h$ eine Trivialisierung mit Matrix der Zusammenhangsformen ω. Wir definieren*

$$\Omega := \chi \circ R \circ \chi^{-1} \in \Gamma(\Lambda^2 M \otimes \mathfrak{gl}_h(\mathbb{R})).$$

Es gilt die Identität

$$\Omega = \mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega,$$

deren Matrixelemente per Definition sind:

$$\Omega^\ell_k = \mathrm{d}\omega^\ell_k + \sum_{r=1}^m \omega^\ell_r \wedge \omega^r_k. \tag{9.20}$$

Wenn wir Koordinaten $(x^1, \dots, x^m)$ auf $U \subset M$ haben, gilt $\Omega^\ell_k = \sum_{i<j} \Omega^\ell_{ijk} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$ auf U, wobei

$$\Omega^\ell_{ijk} = \partial_i \omega^\ell_{jk} - \partial_j \omega^\ell_{ik} + \sum_{r=1}^h \big(\omega^\ell_{ir}\omega^r_{jk} - \omega^\ell_{jr}\omega^r_{ik}\big).$$

Wenn $F : L \to M$ eine glatte Abbildung ist, ist $F^*\Omega$ die Darstellung der Krümmung in der Trivialisierung $\mathcal{P}_F(\chi)$ für die kovariante Ableitung $\mathcal{P}_F(\nabla)$ auf dem Pull-Back Bündel $\mathcal{P}_F(E)$.

Beweis. Wir haben $R(X,Y)e_k = \sum_{\ell=1}^h \Omega_k^\ell(X,Y)e_\ell$ und

$$\begin{aligned}
\nabla_X\nabla_Y e_k &= \sum_{\ell=1}^h \nabla_X(\omega_k^\ell(Y)e_\ell) = \sum_{\ell=1}^h \mathcal{L}_X(\omega_k^\ell(Y))e_\ell + \omega_k^\ell(Y)\sum_{r=1}^h \omega_\ell^r(X)e_r \\
&= \sum_{\ell=1}^h \Big(\mathcal{L}_X(\omega_k^\ell(Y))e_\ell + \sum_{r=1}^h \omega_r^\ell(X)\omega_k^r(Y)\Big)e_\ell \\
\nabla_Y\nabla_X e_k &= \sum_{\ell=1}^h \Big(\mathcal{L}_X(\omega_k^\ell(Y))e_\ell + \sum_{r=1}^h \omega_r^\ell(X)\omega_k^r(Y)\Big)e_\ell \\
\nabla_{[X,Y]}e_k &= \sum_{\ell=1}^h \omega_k^\ell([X,Y])e_\ell.
\end{aligned}$$

Wir subtrahieren die zweite und dritte Gleichung von der ersten und finden (9.20).

Für die Aussage über die Krümmung der Pull-Back kovariante Ableitung nehmen wir das Pull-Back der 1-Formen in (9.20):

$$F^*\Omega_k^\ell = F^*\mathrm{d}\omega_k^\ell + \sum_{r=1}^m F^*(\omega_i^\ell \wedge \omega_k^r) = \mathrm{d}(F^*\omega_k^\ell) + \sum_{r=1}^m (F^*\omega_i^\ell) \wedge (F^*\omega_k^r),$$

wobei wir Hilfsatz 9.37 benutzt haben. Nach Satz 9.15 ist die rechte Seite die Darstellung der Krümmung für die Pull-Back Ableitung. □

9.10 Kovariante Ableitungen und algebraische Operationen

Wir haben im Abschnitt 6.9 gesehen, wie wir durch algebraische Operationen neue Vektorbündel aus alten konstruieren können. Wir sehen nun, dass, wenn die ursprünglichen Vektorbündel mit einer kovarianten Ableitung vorgesehen waren, die neuen Vektorbündel eine eindeutige neue kovariante Ableitung zulassen, die eine gewisse Verträglichkeit mit den alten besitzt.

Satz 9.39. *Es sei $\nabla \in \mathrm{kA}(E)$. Es gibt eindeutig $\nabla^* \in \mathrm{kA}(E^*)$ mit der Eigenschaft*

$$(\nabla^*\tau)(\sigma) + \tau(\nabla\sigma) = \mathrm{d}\big(\tau(\sigma)\big), \qquad \forall\, \sigma^* \in \Gamma(E^*),\ \sigma \in \Gamma(E). \tag{9.21}$$

Wenn ω die Matrix der Zusammenhangsformen von ∇ für eine Trivialisierung ist, ist $-\omega^T$ die Matrix der Zusammenhangsformen von ∇^* für die duale Trivialisierung.

Beweis. Wir folgen dem gleichen Argument wie im Satz 9.15. Es sei $e_1, \dots, e_h$ ein Rahmen für E auf U und es sei $e_1^*, \dots, e_h^*$ der duale Rahmen. Es seien $\tau = \sum_{k=1}^h g^k e_k^*$ und $\sigma =$

$\sum_{k=1}^h f^k e_k$ Schnitte von E^* und E auf U. Dann

$$\begin{aligned}(\nabla^*\tau)(\sigma) + \tau(\nabla\sigma) &= \sum_{k=1}^h \nabla^*(g^k e_k^*)(\sigma) + \tau(\nabla f^k e_k)\\ &= \sum_{k=1}^h \Big((\mathrm{d}g^k)f^k + \sum_{\ell=1}^h g^k f^\ell (\omega^*)_k^\ell + (\mathrm{d}f^k)g^k + \sum_{\ell=1}^h f^k g^\ell \omega_k^\ell\Big)\\ &= \sum_{k=1}^h \mathrm{d}(g^k f^k) + \sum_{k,\ell=1}^h f^k g^\ell \big((\omega^*)_\ell^k + \omega_k^\ell\big).\end{aligned}$$

Da $\tau(\sigma) = \sum_{k=1}^h \mathrm{d}(g^k f^k)$, sehen wir, dass $\omega^* = -\omega^T$ gelten muss. Das zeigt die Eindeutigkeit und (9.21).

Wir beweisen nun die Existenz. Für alle trivialisierende offene Menge U für E setzen wir $\nabla^*|_U$ als die einzige kovariante Ableitung auf E_U^*, die die Matrix der Zusammenhangsformen $-\omega^T$ bezüglich des Rahmens $e_1^*, \dots, e_h^*$ besitzt. Die Existenz von ∇^* auf E^* ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass für jedes Paar von trivialisierenden offenen Mengen $\nabla^*|_{\tilde U}$ und $\nabla^*|_U$ auf $U \cap \tilde U$ übereinstimmen. Das ist klar, weil die Einschränkungen von beiden kovarianten Ableitungen auf $U \cap \tilde U$ der Formel (9.21) genügen und deswegen sind gleich nach der schon bewiesenen Eindeutigkeit. □

Bemerkung 9.40. Wenn wir die Koordinaten eines Schnittes τ von E^* in einer Trivialisierung als Zeilenvektoren F_τ statt Spaltenvektoren schreiben, dann

$$\chi^* \circ \nabla^*\tau = \mathrm{d}F_\tau - F_\tau \cdot \omega,$$

wobei wir nun von rechts die Matrix der Zusammenhangsformen multiplizieren. △

Wir führen nun die entsprechende Konstruktionen für die direkte Summe und das Tensorprodukt. Wir lassen den Beweis aus denn der ähnlich zu dem Fall der dualen kovarianten Ableitung ist.

Satz 9.41. *Es seien $E_1 \to M$ und $E_2 \to M$ Vektorbündel. Für alle $\nabla^1 \in \mathrm{kA}(E_1 \to M)$ und $\nabla^2 \in \mathrm{kA}(E_2 \to M)$ gibt es eindeutig $\nabla^\oplus \in \mathrm{kA}(E_1 \oplus E_2 \to M)$ mit der Eigenschaft*

$$\nabla^\oplus(\sigma_1 \oplus \sigma_2) = (\nabla^1\sigma_1) \oplus (\nabla^2\sigma_2), \qquad \forall\, \sigma_1 \in \Gamma(E_1),\ \sigma_2 \in \Gamma(E_2). \tag{9.22}$$

Wenn ω_1 und ω_2 die Matrizen der Zusammenhangsformen von ∇^1 und ∇^2 für gegebene Trivialisierungen sind, ist $\omega_1 \oplus \omega_2$, siehe (6.6), die Matrix der Zusammenhangsformen von $\nabla^\oplus$ für die entsprechende Trivialisierung. □

Satz 9.42. *Es seien $E_1 \to M$ und $E_2 \to M$ Vektorbündel. Für alle $\nabla^1 \in \mathrm{kA}(E_1 \to M)$ und $\nabla^2 \in \mathrm{kA}(E_2 \to M)$ gibt es eindeutig $\nabla^\otimes \in \mathrm{kA}(E_1 \otimes E_2 \to M)$ mit der Eigenschaft*

$$\nabla^\otimes(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = (\nabla^1\sigma_1) \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes (\nabla^2\sigma_2), \qquad \forall\, \sigma_1 \in \Gamma(E_1),\ \sigma_2 \in \Gamma(E_2). \tag{9.23}$$

Wenn ω_1 und ω_2 die Matrizen der Zusammenhangsformen von ∇^1 und ∇^2 für gegebene Trivialisierungen sind, ist $\omega_1 \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{R}^h} + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^h} \otimes \omega_2$ die Matrix der Zusammenhangsformen von $\nabla^\otimes$ für die entsprechende Trivialisierung. □

Bemerkung 9.43. Es seien $\nabla^1 \in \mathrm{kA}(E_1)$ und $\nabla^2 \in \mathrm{kA}(E_2)$. Wir bekommen dann aus Satz 9.39, Bemerkung 9.40 und Satz 9.42 die kovariante Ableitung $\nabla^{\otimes} \in \mathrm{kA}(E_1^* \otimes E_2) = \mathrm{kA}(\mathrm{Hom}(E_1, E_2))$. Wenn wir die Koordinaten eines Schnittes σ von $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ durch eine Matrix F_σ mit h_2 Zeilen und h_1 spalten darstellen, dann ist

$$\chi^{\otimes}\nabla^{\otimes}\sigma = \mathrm{d}F_\sigma + \omega_2 \cdot F_\sigma - F_\sigma \cdot \omega_1,$$

wobei $\cdot$ die Matrixmultiplikation darstellt. In dem speziellen Fall $E_1 = E = E_2$, dann ist

$$\chi^{\otimes}\nabla^{\otimes}\sigma = \mathrm{d}F_\sigma + [\omega, F_\sigma], \qquad [\omega, F_\sigma] := \omega \cdot F_\sigma - F_\sigma \cdot \omega. \tag{9.24}$$

$\triangle$

Wir können die Dual- und Tensorprodukt kovariante Ableitung, um eine eindeutige kovariante Ableitung auf allen zu E assoziierten Tensorbündeln $E^{(r,s)}$, welche auch verträglich mit der Kontraktion von Tensoren ist.

Satz 9.44. *Es sei $\nabla \in \mathrm{kA}(E)$. Für jedes Paar natürlicher Zahlen (r, s) gibt es eindeutig eine kovariante Ableitung $\nabla = \nabla^{(r,s)} \in \mathrm{kA}(E^{(r,s)})$ mit der Eigenschaften*

(a) $\nabla f = \mathrm{d}f, \qquad \forall\, f \in \Gamma(E^{(0,0)}) = C^\infty(M)$*;*

(b) $\nabla^{(1,0)}$ *ist die gegebene kovariante Ableitung in* $\mathrm{kA}(E)$*;*

(c) $\nabla(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = (\nabla\sigma_1) \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes (\nabla\sigma_2), \qquad \forall\, \sigma_1 \in \Gamma(E^{(h_1,k_1)}), \sigma_2 \in \Gamma(E^{(h_2,k_2)})$*;*

(d) für $i = 1, \ldots, r$ und $j = 1, \ldots, s$ gilt $C^i_j(\nabla\sigma) = \nabla(C^i_j\sigma), \qquad \forall\, \sigma \in \Gamma(E^{(h,k)})$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Nach Eigenschaft (b), (c) und Satz 9.42 ist es genug zu zeigen, dass $\nabla^{(0,1)}$ eindeutig bestimmt ist. Wir behaupten, dass $\nabla^{(0,1)} = (\nabla^{(1,0)})^*$, die kovariante Ableitung aus Satz 9.39. Es reicht daher (9.21) für $\nabla^{(0,1)}$ zu beweisen:

$$\begin{aligned}(\nabla^{(0,1)}\tau)(\sigma) + \tau(\nabla\sigma) = C^1_1\big((\nabla^{(0,1)}\tau) \otimes \sigma\big) + C^1_1(\tau \otimes \nabla\sigma) &= C^1_1\big((\nabla^{(0,1)}\tau) \otimes \sigma + \tau \otimes \nabla\sigma\big)\\ &= C^1_1\big(\nabla^{(1,1)}(\tau \otimes \sigma)\big)\\ &= \nabla^{(0,0)}C^1_1(\tau \otimes \sigma)\\ &= \mathrm{d}(\tau(\sigma)),\end{aligned}$$

wobei wir die Eigenschaft (c), (d) und (a) benutzt haben.

Wir zeigen nun die Existenz. Wir definieren $\nabla^{(0,0)} := \mathrm{d}$, $\nabla^{(1,0)} := \nabla$ und $\nabla^{(0,1)} := \nabla^*$. Die kovariante Ableitung $\nabla^{(r,s)}$ kann nun aus Satz 9.42 auf induktiver Weise konstruiert werden. Die so entstandenen kovarianten Ableitungen genügen (a), (b) und (c). Wir müssen noch (d) zeigen. Nach Linearität ist es genug ein unzerlegbares Tensorfeld $\sigma = \alpha \otimes \beta$, wobei $\alpha \in \Gamma(E^{(r,0)})$ und $\beta \in \Gamma(E^{(0,s)})$ zu nehmen. Wir setzen

$$\hat{\beta} := \otimes_{\substack{i=1\\ i\neq h'}}^{h} \beta_i, \quad \hat{\alpha} := \otimes_{\substack{j=1\\ j\neq k'}}^{k} \alpha^j$$

und berechnen mit Hilfe von (c) und (a):

$$\begin{aligned}
C^i_j(\nabla(\alpha\otimes\beta)) &= \alpha_j(\beta_i)\big((\nabla\hat\alpha)\otimes\hat\beta+\hat\alpha\otimes(\nabla\hat\beta)\big)+\big((\nabla\alpha_j)(\beta_i)+\alpha_j(\nabla\beta_i)\big)\hat\alpha\otimes\hat\beta\\
&= \alpha_j(\beta_i)\nabla\big(\hat\alpha\otimes\hat\beta\big)+\mathrm{d}(\alpha_j(\beta_i))\cdot\hat\alpha\otimes\hat\beta\\
&= \nabla\Big(\alpha_j(\beta_i)\cdot\hat\alpha\otimes\hat\beta\Big)=\nabla(C^i_j(\alpha\otimes\beta)).
\end{aligned}$$

□

9.11 Kovariante Ableitungen auf dem Tangentialbündel

Für die (pseudo)-Riemannsche Geometrie wird der Fall von kovarianten Ableitungen auf $E = TM$ von zentraler Bedeutung sein. Also wollen wir wissen, wie wir Vektorfelder ableiten können. In diesem Fall kann $\nabla \in \mathrm{kA}(TM)$ als bilineare Abbildung $\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ nach Bemerkung 9.2 erfasst werden. Wir kennen aber schon eine bilineare Abbildung auf $\mathfrak{X}(M)$, die Lie-Klammer $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$. Wir wollen nun ∇ und $[\cdot,\cdot]$ vergleichen. Da $[\cdot,\cdot]$ antisymmetrisch ist, ist es sinnvoll zu versuchen, die Lie-Klammer mit der Antisymmetrisierung von ∇ in Verbindung zu setzen.

Satz 9.45. *Für alle $\nabla \in \mathrm{kA}(TM)$ ist die Differenz*

$$\tau^\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M), \qquad \tau(X,Y) := \nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y] \tag{9.25}$$

eine $C^\infty(M)$-bilineare antisymmetrische Abbildung.

Beweis. Nachrechnen. □

Definition 9.46. Wir nennen das Tensorfeld $\tau^\nabla \in \Gamma(\Lambda^2 M\otimes TM)\subset\Gamma(T^{(1,2)}M)$, das nach Satz (6.78) aus der Formel (9.25) entsteht, die Torsion der kovarianten Ableitung ∇. Eine kovariante Ableitung heißt symmetrisch, wenn $\tau = 0$. △

Der nächste Satz begründet das Adjektiv 'symmetrisch'.

Satz 9.47. *Eine kovariante Ableitung $\nabla \in \mathrm{kA}(TM)$ ist symmetrisch genau dann, wenn für alle Karten (U,φ) und den dazu gehörigen Rahmen $\partial_1,\dots,\partial_m$ die Christoffel-Symbole ω^k_{ij}, die durch $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^m \omega^k_{ij}\partial_k$ definiert sind (siehe Bemerkung* 9.10*), symmetrisch in den Indizes i und j sind:*

$$\omega^k_{ij} = \omega^k_{ji}, \qquad \forall\, i,j,k = 1,\dots,m.$$

Beweis. Da τ ein Tensorfeld ist, haben wir

$$\tau|_U = 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad \tau(\partial_i,\partial_j)=0, \qquad \forall\, i,j=1,\dots,m.$$

Da $[\partial_i,\partial_j]=0$ haben wir nach der Definition der Christoffel-Symbole

$$\tau(\partial_i,\partial_j) = \nabla_{\partial_i}\partial_j-\nabla_{\partial_j}\partial_i = \sum_{k=1}^m\Big(\omega^k_{ij}-\omega^k_{ji}\Big)\partial_k.$$

Also $\tau|_U = 0$ genau dann, wenn $\omega^k_{ij}-\omega^k_{ji}$ für alle i,j,k. □

Satz 9.48. *Es sei* $\nabla \in \mathrm{kA}(TM)$ *eine symmetrische kovariante Ableitung, welche flach um einen Punkt* $p \in M$ *ist. Dann existiert eine Karte* (U, φ) *um* p*, sodass* $\partial_1, \ldots, \partial_m$ *einen parallelen Rahmen bilden. Also ist* ∇ *bezüglich der Trivialisierung* $\alpha_\varphi : TM|_U \to U \times \mathbb{R}^m$ *durch das differential* d *gegeben. Das heißt:*

$$\forall\, X = \sum_{i=1}^m X^i \partial_i \in \mathfrak{X}(U), \qquad \nabla X = \sum_{i=1}^m \mathrm{d}X^i \otimes \partial_i.$$

Proof. Da ∇ flach um p ist, wissen wir nach Satz 9.32, dass es einen Parallelen Rahmen $X_1, \ldots, X_m$ von Vektorfelder um p existiert. Da $\tau = 0$ ist, wissen wir, dass

$$[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0 - 0 = 0.$$

Nach Satz 8.32 existiert eine Karte (U, φ) um p, sodass $\partial_i = X_i$. □

10 Skalarprodukte auf Vektorbündeln

10.1 Linearalgebra

Definition 10.1. Ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Das heißt:

(a) g ist bilinear;

(b) $g(u, v) = g(v, u)$ für alle $u, v \in V$;

(c) $g(v, v) > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$. △

Wir schreiben $\mathcal{S}^2_+ V^*$ für die Menge der Skalarprodukte auf V.

Bemerkung 10.2. Die erste zwei Eigenschaften sagen, dass $g \in \mathcal{S}^2 V^* \subset V^* \otimes V^*$ ist. Die dritte Eigenschaft impliziert, dass g nicht ausgeartet ist. Das heißt, dass die lineare Abbildung

$$\flat : V \to V^*, \qquad (\flat u)(v) = g(u, v), \qquad \forall\, v \in V$$

ein Isomorphismus ist. Wir schreiben $\sharp : V^* \to V$ für die Umkehrabbildung von $\flat$. △

Beispiel 10.3. Für jedes Skalarprodukt g auf $\mathbb{R}^n$ gibt es eindeutig eine symmetrische und positiv definite Matrix $G \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, sodass

$$g(u, v) := u^T \cdot G \cdot v, \qquad \forall\, u, v \in V$$

Das euklidische Skalarprodukt g_{euk} ist assoziiert zu der Identitätsmatrix

$$g_{\text{euk}}(u, v) = u^T \cdot v = \sum_{i=1}^h u_i \cdot v^i.$$

△

Wenn $e_1, \dots, e_n$ eine Basis für V und $e^1, \dots, e^n$ die duale Basis auf V^* sind, haben wir

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} e^i \otimes e^j, \qquad g_{ij} = g(e_i, e_j).$$

Wir definieren die symmetrische, positiv definite Matrix $G := (g_{ij}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$), wobei i die Zeile und j die Spalte des Matrixelements bezeichnet. Wenn $K : V \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung, die die Koordinaten in der Basis $e_1, \dots, e_n$ gibt, dann können wir $g(u, v)$ als Matrixprodukt schreiben:

$$g(u, v) = (K \cdot u)^T \cdot G \cdot (K \cdot v), \qquad \forall\, u, v \in V.$$

Also gilt $K^* g_G = g$.

Die Darstellung von $\flat : V \to V^*$ in den Basen (e_i) und (e^j) ist genau durch die Matrix G gegeben:

$$\flat(\sum_{i=1}^{n} v^i e_i) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} v^i g_{ij} \Big) e^j.$$

Daher ist G invertierbar und die inverse Matrix $G^{-1} = (g^{ij})$ stellt die Umkehrabbildung $\sharp$ dar:

$$\sharp(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^j) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j g^{ij} \Big) e_i.$$

Wir untersuchen zuletzt die Wirkung von linearen Abbildungen $F : V_1 \to V_2$ auf Skalarprodukten. Wenn g_2 ein Skalarprodukt auf V_2 ist, ist dann $F^* g_2$ definiert als

$$F^* g_2(u_1, v_1) = g_2(F \cdot u_1, F \cdot v_1), \qquad \forall\, u_1, v_1 \in V_1$$

eine symmetrische Bilinearform auf V_1. Es ist unmittelbar zu sehen, dass $F^* g_2$ ein Skalarprodukt auf V_1 ist, genau dann, wenn F injektiv ist.

Nach dieser kurzen Wiederholung der Linearalgebra sind wir bereit, Skalarprodukte auf Vektorbündel einzuführen.

10.2 Definition und Existenz

Definition 10.4. Ein Skalarprodukt auf einem Vektorbündel $E \to M$ ist ein glatter Schnitt von $\mathcal{S}^2 E^*$, sodass

$$g_p(e, e) > 0, \qquad \forall\, p \in M,\ e \in E_p \setminus \{0_p\}. \tag{10.1}$$

Wir schreiben $\mathcal{S}^2_+ E^*$ für die Menge der Skalarprodukte auf E. Wir nennen ein Skalarprodukt auf TM eine Riemannsche Metrik auf M. $\triangle$

Auf dem trivialen Bündel $M \times \mathbb{R}^h \to M$ lässt sich das Skalarprodukt g_{euk} definieren, welches euklidisch auf jeder Faser ist. Allgemeiner stehen die Skalarprodukte g auf $M \times \mathbb{R}^h$ mit den glatten Funktionen $\tilde{g} : M \to \mathrm{Sym}^2_+((\mathbb{R}^h)^*)$ in Bijektion:

$$g((p, v_1), (p, v_2)) = \tilde{g}_p(v_1, v_2) = \sum_{i,j=1}^{h}, \qquad \forall\, p \in M,\ v_1, v_2 \in \mathbb{R}^h.$$

Bemerkung 10.5. Die Menge $\mathrm{Sym}^2_+((\mathbb{R}^h)^*)$ ist eine offene Teilmenge des Vektorraums $\mathrm{Sym}^2((\mathbb{R}^h)^*)$ und somit eine Mannigfaltigkeit. Es ergibt Sinn also, über glatte Funktionen mit Werten in diesem Raum zu sprechen. △

Wenn $F : E_1 \to E_2$ ein Bündelhomomorphismus ist, können wir für alle Skalarprodukte g_2 auf E_2 ein Element $F^* g_2 \in \Gamma(\mathcal{S}^2 E_1^*)$ gewinnen. Dieses Element ist ein Skalarprodukt auf E_1 genau dann, wenn F faserweise injektiv ist.

Wir zeigen nun, wie ein Skalarprodukt auf jedem Vektorbündel konstruiert werden kann. In dem Beweis spielt eine zentrale Rolle die Tatsache, dass Skalarprodukte positiv definit sind. Solcher Beweis kann nicht, zum Beispiel, zum Fall der Pseudoskalarprodukte mit gegebener Signatur übertragen werden.

Satz 10.6. *Jedes Vektorbündel lässt ein Skalarprodukt zu.*

Beweis. Es sei $\chi : E_U \to U \times \mathbb{R}^h$ eine Trivialisierung. Wir setzen $g^U := \chi^* g_{\text{euk}}$. Da χ ein Bündelisomorphismus ist, ist g^U ein Skalarprodukt auf E_U.

Es sei nun $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von M, die aus trivialisierenden offenen Mengen besteht. Es sei $\{\rho_i\}_{i \in I}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich dieser Überdeckung. Dann

$$g := \sum_{i \in I} \rho_i g^{U_i} \in \mathcal{S}^2 E^*$$

und wir müssen nun (10.1) überprüfen. Es sei $p \in M$. Dann existiert eine endliche nichtleere Teilmenge $I' \subset I$, sodass $\rho_i(p) > 0$ genau dann, wenn $i \in I'$. In diesem Fall ist $p \in U_i$ und für alle $e \in E_p \setminus \{0_p\}$ ist $g^{U_i}_p(e, e) > 0$. Daher

$$g_p(e, e) = \sum_{i \in I'} \rho_i(p) g^{U_i}_p(e, e) > 0.$$ □

Satz 10.7. *Ein Skalarprodukt g auf E liefert Bündelisomorphismen $\flat : E \to E^*$ und $\sharp : E^* \to E$ über M.*

Beweis. Es sei χ eine Trivialisierung für E auf U und χ^* die duale Trivialisierung. Es sei $G := (g_{ij}) : U \to GL_h(\mathbb{R})$ die glatte Matrixfunktion, die g bezüglich χ darstellt. Dann:

$$\chi^* \circ \flat \circ \chi^{-1}(p, v) = (p, G(p) \cdot v), \qquad \forall\, (p, v) \in U \times \mathbb{R}^h.$$

Daher ist $\flat$ glatt und ein faserweise Isomorphismus. Es folgt, dass $\flat$ (und deshalb $\sharp$) ein Bündelisomorphismus ist. □

Folgerung 10.8. *Eine Riemannsche Metrik liefert einen $C^\infty(M)$-Isomorphismus*

$$\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$$

zwischen Vektorfelder und 1-Formen auf M. □

Notation

- $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$.
- $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$.
- $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.
- $\mathbb{K}$ der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
- $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ $\mathbb{K}$-Algebra der $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$.
- $GL_n(\mathbb{K})$ Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen.
- $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ Vektorraum der reellen symmetrischen Matrizen.
- $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ Vektorraum der reellen antisymmetrischen Matrizen.
- $\overline{\mathrm{Sym}}_n(\mathbb{C})$ Vektorraum der komplexen hermitischen Matrizen.
- $\overline{\mathrm{Alt}}_n(\mathbb{C})$ Vektorraum der komplexen antihermitischen Matrizen.
- $\mathfrak{X}(M)$ Raum der Vektorfelder auf M.
- $C^{h'}_{k'}$ Kontraktion von Tensoren.
- $V^{(h,k)} = (V^*)^{\otimes k} \otimes V^{\otimes h}$.
- $\Gamma(E)$ Raum der glatten Schnitte eines Vektorbündels $E \to M$.
- $\mathcal{P}_F(E)$ Pull-Back vom Bündel $E \to N$ bezüglich $F : M \to N$.
- F^* Pull-Back bezüglich $F : M \to N$ von kovarianten oder (unter zusätzlichen Bedingungen) kontravarianten Tensoren von N nach M.
- $\mathrm{kA}(E)$ Raum der kovarianten Ableitung auf dem Bündel E.
- $P^{\gamma}_{t,s} : T_{\gamma(s)}M \to T_{\gamma(t)}M$ Parallelverschiebung entlang γ von Zeit s bis Zeit t.

Danksagung

Ich bedanke mich vom Herzen bei Alex Arnhold, Gregor Bals, Urs Fuchs, Álvaro Muñiz und Sebastian Preuß für die Kommentare und die Fehlermeldung für dieses Skript.

Quellen

- Werner Ballmann, *Einführung in die Geometrie und Topologie, 2. Auflage*, Mathematik Kompakt, Birkhäuser, 2018.

- William M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Revised Second Ed.*, Pure and Applied Mathemtics 120, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.

- Wolfgang Kühnel, *Differentialgeometrie, 6. Auflage*, Aufbaukurs Mathematik, Springer Spektrum, 2013.

- John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds, Second Ed.*, GTM 218, Springer, New York, NY, 2013.

- John M. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds, Second Ed.*, GTM 176, Springer, 2018.

- Johannes Walcher, *Skript für Differentialgeometrie I*, Uni Heidelberg, Sommersemester 2017.